

English Summary:

Dissipative systems

$$\frac{dV_t}{dt} = \wedge V_t \Rightarrow V(t) = V_0 e^{\wedge t} \quad \text{phase space volume shrinks}$$

$$\parallel \text{div } \underline{F} = \text{tr} A = \sum_i \text{Re} \lambda_i < 0 \quad (\text{asymptotically stable fixed points})$$

attractor  $A$ : closed, invariant, undecomposable, asymptotically stable set

attractor basin  $U_0$ :  $\phi_t(U_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} A$

attractors:  $d=1$  stable fixed points  
 $d=2$  " limit cycle  
 $d=3$  " torus  
 strange attractor

### 1.3 Bifurkationen

(A) Eigenwert-Null-Bifurkation

(A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

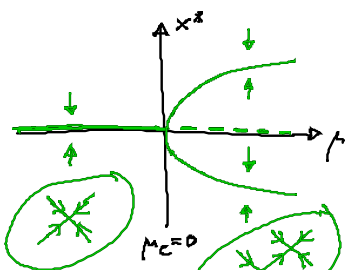
(A2) Transkrit. Bifurkation

A2) Stimmung  $\lambda$ -Bifurkation (pitchfork bifurcation)

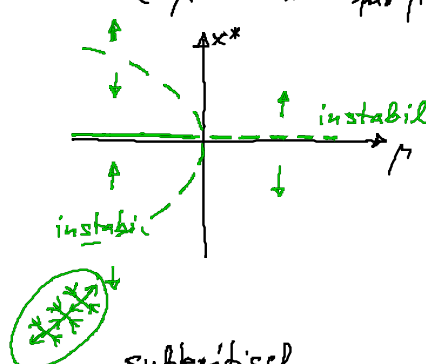
$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 3x^2) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} \pm \sqrt{\mu} & (\text{für } \mu \geq 0) \\ 0 & \end{cases}$$

$$\lambda = \begin{cases} -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \\ \mu & \text{" für } \mu < 0 \end{cases}$$



Superkritisch



subkritisch

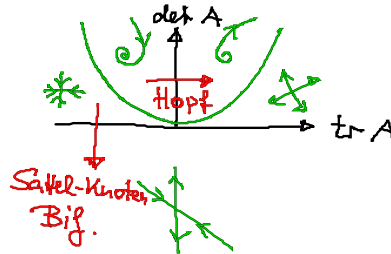
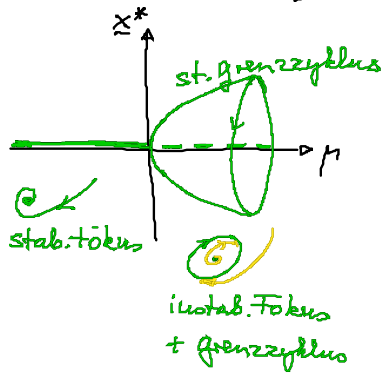
$$\dot{x} = \mu x + x^3$$

(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf): superkritisch

$\lambda = \lambda_0 \pm i\omega$  mit  $\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$

stabiler Fokus  $\rightarrow$  instab. Fokus + stab. Grenzzyklus

$n=2$ :  $\text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$   
(Vor.:  $\det A > 0$ )



min.  $n=2$  nötig!

Hopf-Normalform: generische Taylorentwicklung in der Nähe der Hopf-Bif. (2D-Zentrum-Mannigfaltigkeit)

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1 + i\mu)|z|^2)z \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

lin. Anteil      nichtlin. Anteil  $\Rightarrow$  Bifurkation eines Grenzzyklus (limit cycle LC) = period. Orbit

$\delta \dot{z} = (\lambda + i\omega) \delta z$  lin. um Fixpt.  $z^* = 0$   
 Fixpt.  $z = 0$   
 Eigenwert  $\lambda + i\omega$   $\left. \begin{array}{l} \lambda < 0 : \text{stab. Fokus} \\ \lambda > 0 : \text{instab. Fokus} \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2 - \det A}$$

$$= \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2 - \omega^2}$$

$$= \lambda \pm i\omega$$

Transform. auf Amplitude  $r$  und Phase  $\varphi$ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)} \Rightarrow \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)r^2) r e^{i\varphi}$$

Re:  $\dot{r} = (\lambda \mp r^2) r \Rightarrow r=0$  oder  $r^2 = \pm \lambda$  ( $\lambda \geq 0$ )

Im:  $\dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2)$   $\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega - \gamma \lambda$  Frequ.  
 $\Rightarrow \varphi = (\omega - \gamma \lambda) t$

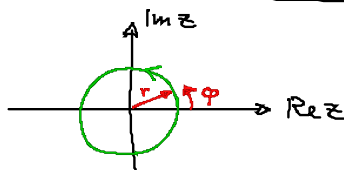
Amplitud.-Phasen-Koppl.

Periode  $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\omega - \gamma \lambda}$

Lös.:  $r=0$  (Fixpkt.)

$$z(t) = \sqrt{\pm \lambda} e^{i(\omega - \gamma \lambda)t} \text{ für } \lambda \geq 0$$

Stuart-Landau-Oszillator



Im Bifurk. pkt. ( $\lambda=0$ )

Amplitude  $r = \sqrt{\pm \lambda} \rightarrow 0$   
 Frequenz  $\omega \neq 0$

lin. Stabilität des LC:

im allgemeinen: Floquet-Theorie

$$\dot{z} = f(z), \text{ perio. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

$$\delta \dot{z} = Df \begin{pmatrix} \delta z \\ z^*, t \end{pmatrix} \text{ mit } Df(t) = Df(t+T), \text{ lin. ODE mit perio. Koeff.}$$

Lösung  $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\Lambda_j t} u_j(t)$  mit  $u_j(t) = u_j(t+T)$

Floquet-Exponenten  $\Lambda_j \in \mathbb{C}$  Floquet-Mode

$$\Rightarrow \Lambda u + i = Df u, \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

Floquet-Multiplikatoren  $\mu = e^{\Lambda T}$  (stabil falls  $|\mu| < 1$ )  
 = Eigenwerte von  $U(T)$

hier: analyt. Lösung möglich in  $r, \varphi$ :

$$\begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mp 3r^2 & 0 \\ \mp 2\gamma r & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{z^*(t)} \quad \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ \mp 2\gamma \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix}$$

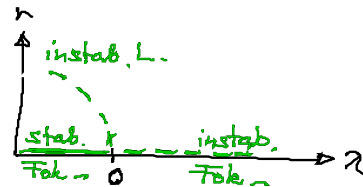
Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von  $A$ :

$$\Lambda^2 + 2\lambda\Lambda = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{cases} 0 & \text{Goldstone-Mode} \\ & \text{(long. Bewegung entlang LC)} \\ -2\lambda \leq 0 \quad (\lambda \geq 0) & \text{(transversaler Floquet-Exp.)} \end{cases}$$



Bifurkationsdiagramm:



superkrit. Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + i\gamma)|z|^2)z$$

subkrit. Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z|^2)z$$