

English Summary:

Master stability fun. (MSF) = largest Lyapunov exponent $\Lambda(v)$
 $v \in \mathbb{C}$

Synchr. solution is stable $\Leftrightarrow \Lambda(v_k) < 0$ ($k=1, \dots, N-1$)
 $\uparrow \quad \uparrow$ transverse eigenvalues
 dynamics topology of \tilde{G}

$v_N \equiv \sigma = \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij}$ long. eigenvalue $\hat{=}$ eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ synchr. manifold

4. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen

Bisher: determinist. dynam. Systeme
 jetzt: stochast. dynam. Systeme

4.1 Rauschinduzierte Oszillationen und Kohärenzresonanz

Stochast. Prozess

Zeitentwicklung einer Zufallsvar. $X(t)$

(\leftrightarrow in thermodyn. Gleichgewicht zeitunabhängige Wahrscheinl.-
 verteilung durch Jaynes'sche Prinzip der vorurteilsfreien
 Schätzung gegeben: verallg. kanon. Verteilung $p_i = Z^{-1} e^{-\lambda_v M_i^v}$,
 M_i^v Zufallsvar.)

Verbundwahrscheinl. zeitabh.: $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$
 Realisierungen $x_1, x_2, x_3 \dots$ von $X(t)$

Markoff-Prozess

$p(x_1, t_1 | x_2, t_2, x_3, t_3, \dots) := \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; \dots)}$ bedingte
 Wahrscheinl.

$\hat{=}$ $p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$ hängt nur von der
 jüngsten Bed. ab

$t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots$ kein Gedächtnis!

Langevin-Gleichung

fluktuierende stoch. Kraft $\xi(t)$ (Rauschen, noise)

z.B. Brown'sche Bewegung (1827)

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + \xi(t)$$

Reibung Rauschen

Gauß'sches weißes Rauschen

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \langle \dots \rangle = \text{statist. Mittelung}$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t') \quad \text{unkorr.}$$

zentraler Grenzwertsatz: unkorrel. Zufallsvar. ergeben
einer Gaußverteilung

Autokorrel. fkt.

$$\mathbb{F}(s) := \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$$

ergod. System: Ensemblemittel = Zeitmittel

$$\mathbb{F}(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+s) \quad (\text{hier } \langle x \rangle = 0)$$

$$\text{Fourier-Transform: } \hat{x}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t) \quad \text{in } t \in [-T, T]$$

spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

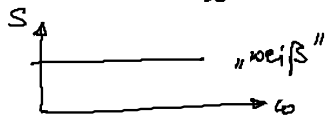
$$S(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} |\hat{x}(\omega, T)|^2$$

$$\Rightarrow S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$$

Wiener-Khinchin-Theorem

Gauß'sches weißes Rauschen $\xi(t)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s) e^{i\omega s} ds = \frac{1}{2\pi} = \text{const.}$$



Rauschinduzierte Oszillationen

1. Beispiel: System knapp unterhalb einer Hopf-Bif.

Van der Pol-Osz. (1926, el. Stromkreis)

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

D Rauschintensität

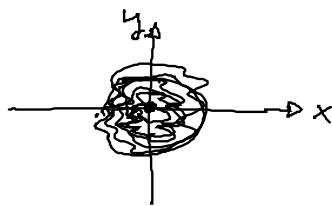
$\xi(t)$ Gauß'sches weißes Rauschen

$D=0$: Fixpt. $x=y=0$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \epsilon \end{pmatrix} \leftarrow A = E, \det A = \omega_0^2$
 $\epsilon=0$ Hopf-Bif., $\epsilon < 0$ stabiler Fokus
 $\epsilon > 0$ instab. Fokus + LC

hier: $\epsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$, $\lambda = \frac{\epsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\epsilon}{2})^2} \approx \frac{\epsilon}{2} \pm i\omega_0$
 \Rightarrow keine determinist. Osz.

aber rauschinduzierte Osz. ($D \neq 0$)

Lit. Janson, Balanov, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)
 Balanov, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)
 Schöll, Balanov, Janson, Neiman: Stoch. Dyn. 5, 281 (2005)



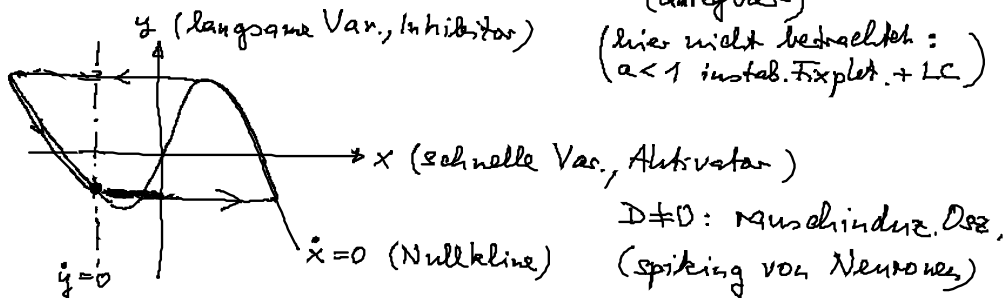
rauschinduzierte Osz.
 (VdP)

2. Beispiel: anregbares System (Typ II)
FitzHugh-Nagumo-Modell (Neuronen)

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = x + a + D\xi(t) \end{cases}$$

Zeitchalentrennung $\epsilon \ll 1$ ($\epsilon = 0.01$)
 Anreg.schwelle a ($a = 1.1$)

$D=0$: Fixpt. $x = -a$, $y = -a - \frac{a^3}{3}$ stabiler Knoten für $a > 1$ (anregbar)
 (hier nicht betrachtet: $a < 1$ instab. Fixpt. + LC)



$D \neq 0$: rauschinduz. Osz.
 (spiking von Neuronen)

Kohärenzresonanz (Pikovsky, Kurths: PRL 78, 775 (1997))

Hu, Ditinger, Nigg, Haken: PRL 71, 807 (1993)
 (stoch. Resonanz ohne ext. treibende period. Kraft)

konstruktiver Einfluss von Rauschen =

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintensität $D_{opt} > 0$.

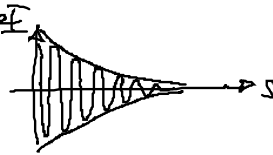
- Maß für Regularität:

$$\text{Korrelationszeit } t_{cor} = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \int_0^{\infty} |\dot{x}(s)| ds$$

Autokorrelat. $\dot{x}(s)$
Varianz

(für lin. stoch. Prozesse $\dot{x} = -(\lambda + i\omega_0)x + \xi(t)$)

$$\dot{x}(s) = \dot{x}(0) e^{-\lambda s} \cos(\omega_0 s)$$



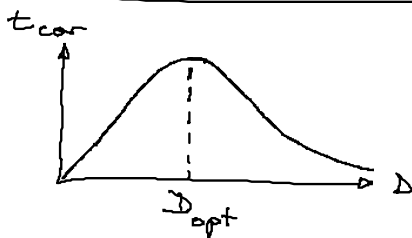
$$t_{cor} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

Approx: $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$ Füllfaktor für $\lambda \ll \omega_0$

$$t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(s) = \dot{x}(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{cor}}} \cos(\omega_0 s)$$

(exp. abklingende Korrelation)



Kohärenzresonanz

z.B. FHN (nichtlinear)
anregbar $|a| > 1$

2 Zeitstufen, die unterschiedlich von der Rauschintensität abhängen:

- Aktivierungszeit $T_{act}(D) \searrow$ t_{cor} besser mit D
- Exkursionszeit $T_{exc}(D) \nearrow$ t_{cor} schlechter mit D