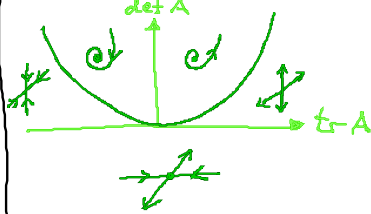


English Summary:

1.2 Stability and long-time behavior

asymptotic stability:  $\delta \dot{x} = \underbrace{(DF)_x}_A \delta x$



$A \rightarrow$  eigenvalues  $\lambda_k$   
 $\text{Re } \lambda_k < 0 \quad \forall k$

1.2.1 Hamiltonian vector fields:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \Rightarrow \text{tr } A = \text{div } \underline{F} = 0$$

phase space volume conserved

1.2.2 Dissipative Systeme

Für dissipative Systeme gilt für kleine Volumina, die einen asymptotisch stabilen Fixpunkt  $x^*$  umschließen

$$\frac{dV_t}{dt} \approx \int_{V_t} d^2f_x (\text{div } \underline{F})_{x^*} = \Lambda \cdot V_t \Rightarrow V(t) = e^{\Lambda t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

mit Phasenraumkontraktionsrate  $\Lambda: \text{div } \underline{F} = \text{tr } A = \sum_i \text{Re } \lambda_i < 0$

Allg. gilt

Def. Dissipative Systeme sind solche, die Phasenraumvolumina kontrahieren.

Asymptotisch stabile Fixpunkte (Knoten, Fokus) heißen Senken oder Attraktoren.

Beispiel für dissipatives System: Lorenzmodell

(abgeleitet aus der Temperatur- u. Strömungsverteilung einer inkompressiblen Flüssigkeit: Rayleigh-Bénard-System)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -xz + \rho z - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

$$\sigma, \rho, b > 0$$

Linearisierung:

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z & -1 & g-x \\ y & x & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \Lambda = \text{tr} A = -(\sigma+1+b)$$

$$\Rightarrow V(t) = e^{-(\sigma+1+b)t} V_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \text{Phasenraumvolumina schrumpfen monoton!}$$

Hermann Haken: semiklass. Lasergleichungen  
(Maxwell-Bloch-gln.)  
sind äquivalent zu den Lorentzgleichungen.

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch  
Attraktoren bestimmt:

Def.: Sei  $E$  ein Vektorfeld auf  $M = \mathbb{R}^n$   
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss  $\phi_t$  invariante  
( $\phi_t(A) \subseteq A$ ), unzerlegbare Teilmenge  $A \subset M$  heißt  
Attraktor, falls


- (i)  $A \subset U_0$  (offene Umgebung von  $A$ ) mit  $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$  ( $t > 0$ )
- (ii)  $\forall V$  mit  $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$ , so dass  $\phi_t(U_0) \subset V$  ( $t > T$ )



d.h. es gibt ein Attraktorbecken  $U_0$ , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.

NB: Es kann mehrere koexistierende Attraktoren auf  $M$  geben.

Mindest dim. $n$ des Phasenraums	Attraktor	Attraktor- dim.	
1	stabiler Fixpkt.	0	$n=1$ 
2	stabiler Grenzzyklus (limit cycle)	1	$n=2$ 
3	stabiler Torus $T^2$	2	

seltsamer Attraktor (strange)	$2 < d < 3$ fraktal	quasiperiodisch 2 Frequenzen, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ chaotisch 
----------------------------------	------------------------	--

### 1.3 Bifurkationen

- Abhängigkeit des Flusses von einem Kontrollpar.  $\mu$ ?
- Zahl und Art der Attraktoren kann sich selbstergänzend bei einem krit. Wert  $\mu_c$  ändern.  
 → Bifurkation („Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit“)  
 Notwendige Voraussetzung: Nichtlinearität
- Verknüpft mit Stabilitätswechsel → untersuche lineare Stab. der Fixpkte. (für lokale Bif.)

#### Klassifizierung

##### (A) Eigenwert-Null-Bifurkation

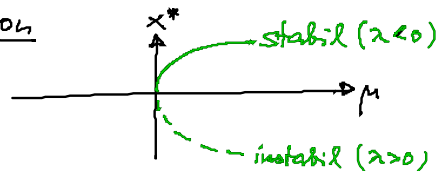
$$\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$$

$$\det A > 0 \rightarrow \det A < 0$$

##### (A1) Sattel-Knoten-Bifurkation

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

$$x^* = \pm\sqrt{\mu}$$



##### (A2) Transkrit. Bifurkation

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \delta \dot{x} = (\mu - 2x^*) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$

Stabilitätswechsel  
bei  $\mu_c = 0$

