

English Summary:

Networks

topology given by adjacency matrix $a_{ij} = 1$ iff link $i \leftrightarrow j$ exists

$i, j = 1, \dots, N$ nodes

node degree $k_i = \sum_j a_{ij}$

degree distribution $P(k)$

mean degree $\langle k \rangle = \sum_k P(k)k$

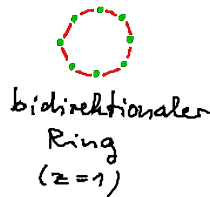
mean path length l

cluster coefficient C_i

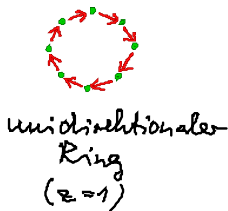
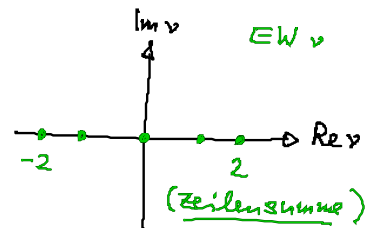
- regular ring (nonlocal coupling of range $r = \frac{r}{N}$)
- global coupling (all-to-all)
- random network (Erdős-Rényi)
- small-world (large C_i , small l)
- scale-free ($P(k) \sim k^{-\alpha}$)

- Eigenwertspektrum von \underline{A} oder \underline{G} beschreibt die Topologie

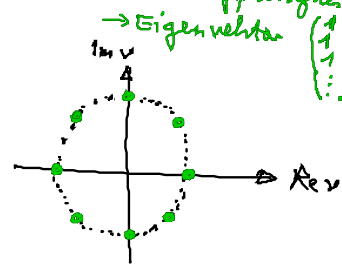
z.B. Netz, $N=8$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

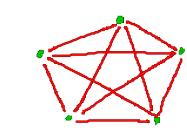


Verallgemeinerung: circulante Matrizen

$$v_k = \exp\left(\frac{2\pi i k}{N}\right)$$

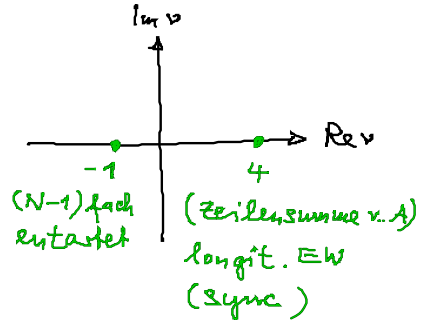
$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $v_k = \chi\left(e^{\frac{2\pi i k}{N}}\right)$, $\chi(v) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \dots + c_{N-1} v^{N-1}$



vollständiger Graph
(all-to-all)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



3.1.2 Kopplungsdiagramme

dyn. Var. auf jedem Knoten $x_i \in \mathbb{R}^m$

- Kopplungsdiagramm H_{ij} ($m \times m$ Matrix) gibt an, wie die Variablen der Knoten i und j koppeln
- \Rightarrow dynam. Gl.

Beispiel: gekoppelte Laser: dyn. Var. $x = \begin{pmatrix} E \\ n \end{pmatrix}$ el. Feld
Ladungsträgerdichte

$$m=2, \text{ z.B. } H_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Feld koppelt an
Feldvariable
(Spiegel)

- opt. Kopplung: Feldvar. i an Feldvar. j
- elektro-opt. Koppel.: Feldvar. i an Ladungsträgervar. j
- Selbstkopplung (Lang-Kobayashi-Modell):
Feld i koppelt an Feld i (Spiegel)

2 Hopf-Normalformen: $x = \begin{pmatrix} \text{Re } z \\ \text{Im } z \end{pmatrix}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S^1 -symm. brechende Kopplung nur über $\text{Re } z$:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒ Diff: gl. System aller Elemente
 $x_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, N$ (m Dim. des Phasenraumes eines Elementes)

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} H_{ij} x_j$$

lokale Dyn., z.B. Hopf-Normalform

Kopplungsstärke

↑ Topologie (N x N)

↑ Kopplungschema (m x m)

zeitverzögert gekoppelte Netzwerke

- direkte Kopplung

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} H_{ij} x_j(t - \tau_{ij})$$

Beispiel: Laser mit Feedback

$$(N=1, a_{ij}=1)$$

$\tau_{11} = \tau_{ex}$ (round-trip-Zeit zum Spiegel)

- diffusive Kopplung

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N a_{ij} H_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t)]$$

Beispiel: Neuronenkopplung

Input ist Potenzialdifferenz

Bem.: beides in einander umformen durch

$$\tilde{F}_i = F_i - \sigma \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} H_{ij} \right) x_i$$

(geänderte lokale Dynamik)

3.2 Synchronisation von Netzwerken

Synchronisation und Desynchronisation:

- erwünschter Effekt

z.B. Synchronisation von Lasern
(verschlüsselte Kommunikation durch chaot. Synchron.)



Synchronisation der Neuronen im Gehirn
(Lernvorgänge, Gedächtnis, Wahrnehmung)

- unerwünschter Effekt

z.B. patholog. Zustände im Gehirn (synchron. Feuern)
(Parkinson, Tremor, Epilepsie)

Schwingungen der London Millennium Bridge (2000)
durch spontane Synchron. der Fußgänger

Lit.: Pikovsky, Rosenblum, Kurths: Synchronisation
(Cambridge University Press 2001)

3.2.1 Voraussetzung für Synchronisation der Elemente

$$\dot{x}_i = F_i(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} H_{ij} x_j(t - \tau_{ij}) \quad \begin{matrix} x_i \in \mathbb{R}^m \\ i = 1, \dots, N \end{matrix}$$

- $F_i = F$ alle Elemente gleiche lokale Dynamik
- $\tau_{ij} = \tau$ " gleiche Signallaufzeiten
- $\sum_{j=1}^N G_{ij} = \text{const. } \forall i$ alle Elemente bekommen im Fall der Synchronisation das gleiche Eingangssignal

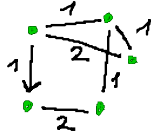
$$\text{O.B.d.A.} : \sum_{j=1}^N G_{ij} = 1$$

$$\text{oder } \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \rightarrow \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} \Rightarrow \sum_{j=1}^N \tilde{G}_{ij} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{konstante} \\ \text{Zeilensumme} \end{array} \right)$$

= long. Eigenwert von \tilde{G}

zur Synchronisations-
Mannigfaltigkeit

konstante Zeilensumme erreicht man
durch Wichtung der Links



• $\underline{H}_{ij} = \underline{H}$ identische Kopplungsschemata $\underline{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$

\Rightarrow Dynamik auf der isochronen Synchronisations-
mannigfaltigkeit gegeben durch

$$\dot{\underline{x}}_s = \underline{F}(\underline{x}_s) + \sigma \underline{H} \underline{x}_s(t-\tau) \quad \underline{x}_s = x_i(t) \quad \forall i$$

↑
long. EW von \tilde{G}

entspricht der Dynamik eines einzelnen Elements
mit zeitverzögerter Rückkopplung
(gleichphasige Lösung, zero-lag Synchronisation)

v_1, \dots, v_{N-1} transversale EW von \tilde{G}

\rightarrow wichtig für Untersuchung
der Stabilität der
Synchronen Lösung

Frage: Ist die Dynamik in Synchronisationsmannigfalt.
stabil?