

English Summary

Interplay of delay and noise

Gaussian white noise: $\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$

autocorr. function $\Psi(s) = \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t+s) - \langle x \rangle) \rangle$

power spectral density $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+s) \rangle e^{i\omega s} ds$

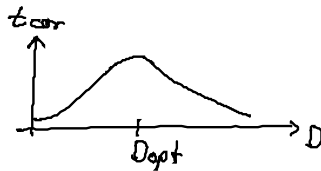
Wiener - Khinchin Theorem

noise induced osc.: Van der Pol $\dot{x} = y$
 $\dot{y} = (\epsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t)$

FitzHugh - Nagumo $\epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$

$$\dot{y} = x + a$$

coherence resonance
(FHN $|a| > 1$)



$$\tau_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$$

4.2. Stochastische Differentialgleichungen (SDE)

• kurze Einführung zur Handhabung

Gegeben sei ein dynamisches System mit Rauschen

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t) \xi(t)$$

Problem: Durch Rauschen sind die Trajektorien $x(t)$ nicht mehr differenzierbar

$x(t)$ ist jetzt eine Zufallsvariable

$\xi(t)$ unkorreliertes
weißes Rauschen

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

Umschreiben in Differentialoperatoren

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW(t)$$

=> SDE kann formal integriert werden

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t dt' a(x, t') + \int_{t_0}^t dW(t') b(x(t'), t')$$

wobei $dW(t) = \xi(t) dt$

"Wiener Prozess"

$$W(t) = \int_0^t \xi(t') dt'$$

• das ist keine explizite Lösung, da $a(x, t)$ von $x(t)$ abhängt

→ keine analytische Lösung möglich
 stattdessen können Mittelwerte und Varianz bestimmt werden

$$\text{Varianz} : \langle (x(t) - \langle x \rangle)(x(t) - \langle x \rangle) \rangle = \Psi(0) = \sigma_x$$

Beispiel : 1 dim System $x \in \mathbb{R}$
 $a=0$
 $b = \text{const}$

$$\Rightarrow dx = b dW$$

(*)

$$\text{Mittelwert} : \langle x \rangle = \left\langle b \int_{t_0}^t dW(t') \right\rangle = \left\langle b \int_{t_0}^t \xi(t') dt' \right\rangle = 0$$

$$\delta(t, t') = \langle \xi(t) \xi(t') \rangle$$

$$0 = \langle \xi(t) \rangle$$

$$\text{Varianz} : \langle x(t)x(t) \rangle = \left\langle b^2 \int_{t_0}^t dW(t') \int_{t_0}^t dW(t'') \right\rangle$$

$$= b^2 \int_{t_0}^t dt' = \underline{\underline{b^2(t-t_0)}}$$

Varianz steigt linear mit der Zeit, Abweichung vom Startwert steigt mit $\sqrt{t-t_0}$.

Beispiel 2 : 1 dim
 $b = \text{const}$
 $a(x) = ax$ $\Rightarrow dx = ax + b dt$ (*)

Lineare inhomogene
 stochastische DGL.

1) homogene Lösung finden zu $\dot{x} = ax$

Fundamentalsystem $x^H(t) = e^{at}$

2) Ansatz für inhomogene Lösung zu $\dot{x} = ax + b f$

$x^I = c(t) x^H$

(Variation der Konstanten)

einsetzen in DGL

$$\begin{aligned} \dot{c} x^H + c \dot{x}^H &= a c x^H + b f \\ \dot{c} x^H + c a x^H &= a c x^H + b f \\ \dot{c} x^H &= b f \end{aligned}$$

Nebenbemerkung

Suchen $x^H x^{H*} = 1$

x^{H*} ist eine Lösung zur
 adjungierten DGL

$-\dot{x}^* = a^* x^*$

hier $x^{H*} = e^{-at}$

$\dot{c} = b f x^{H*}$

$\rightarrow c(t) = \int_0^t b f(s) x^{H*}(s) ds$

allgemeine Lösung von (*)

$x(t) = x^H(t) \cdot x_0 + x^H(t) \cdot c(t)$

stochastische Zufallsvariable $x(t)$

Mittelwert : $\langle x \rangle = \langle x_0 \cdot x^H \rangle + \langle c(t) \cdot x^H \rangle$

$= e^{at} (\langle x_0 \rangle + \langle c(t) \rangle)$

$= e^{at} (\langle x_0 \rangle + \langle \int_0^t b f(t') e^{-at'} dt' \rangle)$

geht gegen Null für $t \rightarrow \infty$ ($a < 0$)

$\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

Varianz

$$\sigma = \Psi(0) = \langle x(t)x(t) \rangle$$

$$\Psi(s) = \langle x(t)x(t+s) \rangle$$

sei $\langle x_0 \rangle = x_0$

$$= \langle (x_0 e^{at} + c(t)e^{ab}) (x_0 e^{a(t+s)} + c(t+s)e^{a(t+s)}) \rangle$$

$$= x_0^2 e^{2at+2as} + \langle c(t)c(t+s)e^{2at+2as} \rangle + \langle c(t)c(t+s)e^{2at+2as} \rangle$$

sei $a < 0$

$\rightarrow 0$
für $t \rightarrow \infty$
(mit e^{2at})

$\rightarrow 0$
für $t \rightarrow \infty$
(mit e^{at})

$dWdW = dt$

$$= \left\langle b^2 \int_0^t \int_0^{t+s} f(t') f(t'') e^{-at'} e^{-at''} dt' dt'' e^{2at+2as} \right\rangle$$

$$S(t-t') = \langle f(t') f(t) \rangle$$

$$= b^2 \int_0^t e^{-2at'} dt' \cdot e^{2at+2as}$$

$$= b^2 \left[\frac{1}{-2a} e^{-2at'} \right]_0^t e^{2at+2as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} [e^{-2at} - 1] e^{2at+2as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} e^{as} - \frac{b^2}{-2a} e^{2at+2as}$$

$\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{b^2}{-2a} e^{as}$$

← vergleiche VL 3.6,

Varianz

$$\sigma = \frac{b^2}{-2a}$$

Bemerkung

SDE der Form $dx = ax + b \xi$
 hat eine Varianz die sich reziprok
 mit a (=Eigenwert) ändert.

- starke Dämpfung \rightarrow kleine Varianz
- schwach gedämpfte Eigenwerte werden
 leicht vom Rauschen gestört!

NB: $\int dW \int dW \cong \int dt$

$$\left\langle \left(\sum_{t_i}^{t_1} dW_1 + dW_2 + \dots \right) \left(\sum_{t_j}^{t_1} dW_1 + dW_2 + \dots \right) \right\rangle$$

$$\left\langle \sum_{t_i} dW_i dW_i \right\rangle + \left\langle \sum_{t_i} dW_i dW_{i+1} \right\rangle + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_1 \quad \langle \delta(t_i) \delta(t_{i+1}) \rangle = 0$

Beispiel 3 : Lineare SDE mit mehrdimensionalen Phasenraum

$$d\underline{X}_t = \underline{A} \cdot \underline{X}_t dt + \underline{B} d\underline{W}$$

$d\underline{W}$: mehrdimensionaler Wiener Prozess

(gleiches Vorgehen wie bei Bsp. 2)

$$\underline{X}_t \in \mathbb{R}^d$$

Fundamentalsystem der
 homogenen Lösung

$$\underline{\phi}(t) = e^{\int_0^t A(u) du} = \left(e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1, e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2, \dots, e^{\lambda_d t} \underline{v}_d \right)$$

\uparrow
 eine Spalte der Matrix
 ist eine Eigenlösung

Allgemeine Lösung

$$\underline{X}_t = \underline{\phi}(t) \underline{X}_0 + \underline{\phi}(t) \int_0^t \underline{\phi}^{-1}(s) \underline{B} \xi ds$$

$$\underline{c}(t) \left[\text{ID: } \int_0^t b \xi x_{\#}^*(s) ds \right]$$

$$\underline{\phi}^{-1} \text{ Lösung von } -\dot{\underline{x}}^* = \underline{A}^* \underline{x}^*$$

$$\langle \underline{A} \underline{x}, \underline{y}^* \rangle = \langle \underline{x}, \underline{A}^* \underline{y}^* \rangle$$

Mittelwert $\langle \underline{X}_t \rangle = 0$

(gleiches Argumentation wie 1D Fall)

Varianz
Matrix

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{x}_t \otimes \underline{x}_t^T \rangle$$

$$\stackrel{(t \rightarrow \infty)}{=} \phi(t) \int_0^t \left[\underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s) \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{\Phi}}^{-1}(s)^T \right] ds \phi^T(t)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \int_0^t e^{A(t-t')} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}}^T e^{A^T(t-t')} dt'$$

Vorteil: Zur Berechnung der
Varianz muss die SDE nicht
integriert werden
→ spart Rechenaufwand