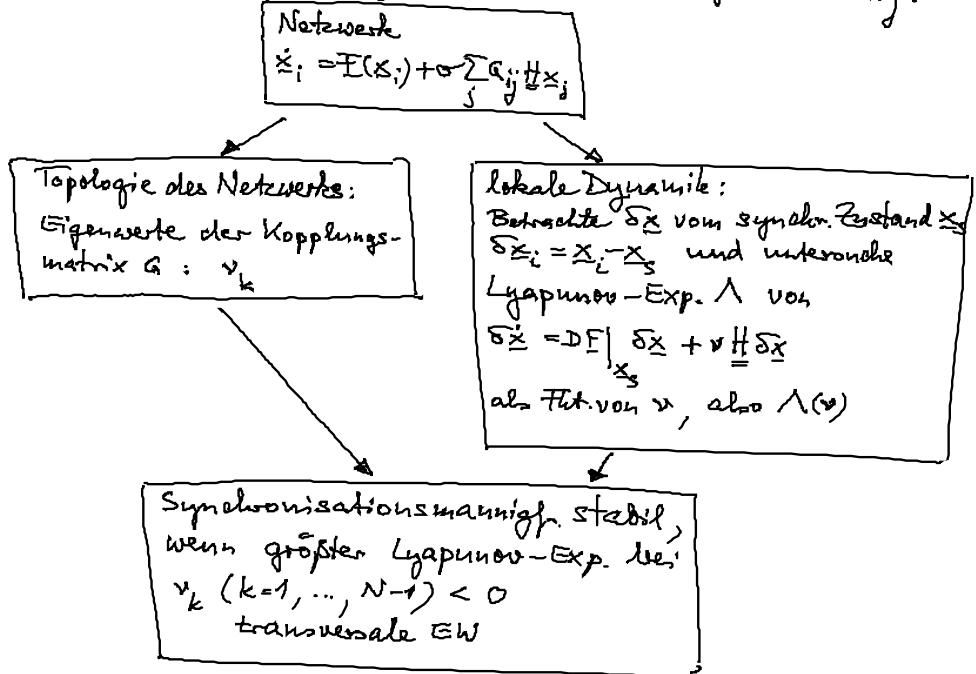


English Summary:
Synchronisation of networks
 $\dot{x}_i = F(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} H_j x_j(t-\tau) \quad x_i \in \mathbb{R}^m, i=1, \dots, N$
 necessary cond.: $\sum_{j=1}^N G_{ij} = 1 \quad \forall i$
 Synchronized sol.: $\boxed{\dot{x}_s = F(x_s) + \sigma H x_s(t-\tau)} \quad x_s = x_i$

3.2.2 Master Stability Function (MSF)
 Schema zur Bestimmung der Stabilität der synchron. Lösung:



MSF = Master Stability Fct. = größter Lyapunov-Exp. $\lambda(v)$
 Synchron. lös. stabil $\Leftrightarrow \lambda(v_k) < 0 \quad (k=1, \dots, N-1) \quad v \in \mathcal{G}$

aus Dyn. aus Topologie ($\tilde{G} = \sigma G$)

Vorteile: Wenn $\Lambda(v)$ einmal berechnet ist, kann Stab. für beliebige Topologien betrachtet werden.

(Separation von Topologie u. lokaler Dynamik)

NB - analog für diskrete Abb. (statt Dgl.)

- sowohl period. als auch chaot.-synchr. Lösungssets untersuchbar

Herleitung der Master Stability Funct.

(a) $\dot{x} = F(x) + \sigma(G \otimes H)x \quad x \in \mathbb{R}^{mN}$, G $N \times N$ -Matrix, H $m \times m$ -Matrix

(b) Linearisierung um den synchr. Zustand $\delta x = x - x_{sync} \in \mathbb{R}^{mN}$
 $\dot{\delta x} = \underline{DF}(x_{sync}) \delta x + \sigma(G \otimes H) \delta x$

(c) Diagonalisierung von Kopplungsmatrix G ($A_{ij} = \sum_j G_{ij} = 1$, $\sum_j \tilde{G}_{ij} = \sigma$)
 $\dot{\delta x}_i = \underline{DF}(x_{sync}) \delta x_i + v_k H \delta x_i \quad x_i = \dots = x_N \in \mathbb{R}^m$

für Eigenwerte v_k , $k=1, \dots, N$ ($v_N = \sigma$ lang. EW)

(d) Wähle $v = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ als Parameter und berechne $\Lambda(v)$ (MSF)

(e) Test, ob $\Lambda(v_k) < 0$ für alle v_k von geg. \tilde{G} für Stab. der synchr. Lös. ($k=1, \dots, N-1$)
 transv. GW

NB: $\Lambda(v_N) > 0$ chaot. sync. Lös.

$\Lambda(v_N) = 0$ period. sync. Lös.

L.M. Pecora, T.L. Carroll, PRL 80, 2109 (1998)
 (Netzwerke ohne Zeitverzögerung)

Verallg. auf zeitverzögerte Kopplung $\Rightarrow \left. \begin{matrix} x_j(t-\tau) \\ \delta x_j(t-\tau) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{im} \\ \text{Koppl.} \\ \text{term} \end{matrix}$

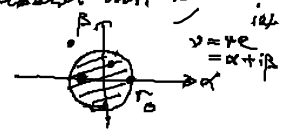
3.2.2 Stabilität der synchr. Lös. für große τ

V. Flunkert, S. Yanchuk, T. Dahms, E. Schöll: PRL 105, 254101 (2010)

- $\Lambda_{\max}(\sigma) > 0$ chaot. Dyn.
- ≤ 0 period. Dyn. / Fixpt.
- $\Lambda_{\max}(v_k) < 0$ Sync stabil } $k=1, \dots, N-1$
- > 0 " instab. } (v_{\max})

Struktur der MSF für großes Delay:

- $\Lambda_{\max}(re^{i\varphi})$ ist re. symm. : $\Lambda_{\max}(r)$
- $\Lambda_{\max}(0) < 0$ und monoton wachsend mit n
 $\Lambda_{\max}(r)$ wird positiv bei $r=r_0$
 oder
 $\Lambda_{\max}(0) > 0$ und dann überall konstant $\forall n$



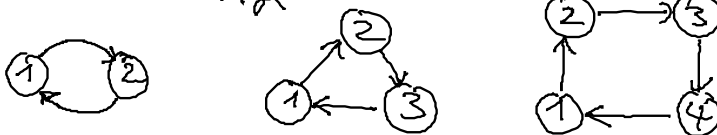
Universelle Klassifikation von Netzwerken mit großem τ

Klasse	chaot. sync. Dyn. ($r_0 < \sigma $)	nichtchaot. sync. Dyn. ($r_0 \geq \sigma $)
(A) $ v_{\max} < \sigma $	sync. stabil $\Leftrightarrow v_{\max} < r_0$	sync. stabil
(B) $ v_{\max} = \sigma $	sync. instabil	stabil stabil
(C) $ v_{\max} > \sigma $	sync. instabil	sync. stabil $\Leftrightarrow v_{\max} < r_0$

↑
Heiligenthal et al,
PRL 107, 294102 (2011)

Klasse B und C - Beispiele

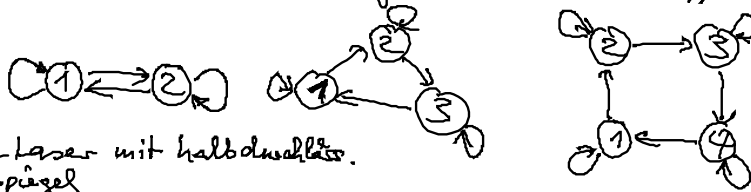
- unidirekt. Ringe



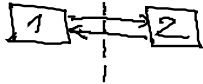
- Netzwerke mit Zeilensumme $\sigma = 0$

Klasse A

- unidirektionale Ringe mit Rückkopplung



2 Laser mit halbtransparenten Spiegeln



- bidirektion. Ringe
- all-to-all coupling
- Netzwerke, die nur exzit. (attraktiv) oder nur inhib. (repulsiv) gekoppelt sind (Klasse A oder B)

3.3 Netzwerke aus Hopf-Normalformen

C.H. Choe, Dahms, Hävel, Schöll: PRE 81, 025205(R) (2010)

- N gekoppelte Stuart-Landau-Osz.

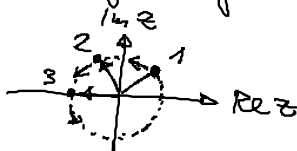
$$\dot{z}_j = (\lambda + i - (1 + i\kappa) |z_j|^2) z_j + i \sum_{n=1}^N g_{jn} (z_n(t-\tau) - z_j(t)) \quad (I)$$

$\omega=1$ ↑ κ ↑ supakust.

Kopplungsstärke $\sigma = \kappa e^{i\phi} \in \mathbb{C}$
 Koppelmatrix G
 Oszill. $z_j = r_j e^{i\phi_j}$

3.3.1 Cluster-Synchronisation

Verallg. Synchronisationszustände



Many-go-round

- Wir suchen D_m -invariante Zustände, für die gilt: (Diedergruppe D_m , m -zählige Rot.)

$$\dot{r}_j = 0 \quad (\text{konst. Amplitude})$$

$$\dot{\phi}_j = \Omega_m \quad (\text{gemeinsame konst. Freq.})$$

Annahme: gleiche Amplitude aller Osz., konst. Phasenunterschied

$$r_j = r_{0,m} \quad (II)$$

$$\varphi_j = \Omega_m t + j \frac{2\pi m}{N} \quad m \in \mathbb{N}_0$$

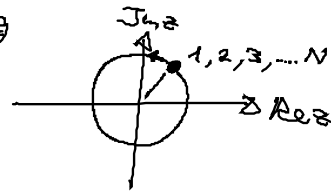
Index m klassifiziert mögliche Clusterzustände:

$m=0$

Synchrone in-Phase-Lösung
(zero-lag)

$$r_j = r_0, 0$$

$$\varphi_j = \Omega_0 t$$



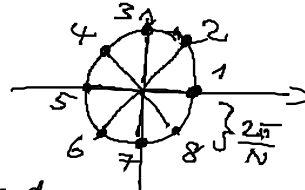
$m=1$

Splay state

$$r_j = r_0, 1$$

$$\varphi_j = \Omega_1 t + j \frac{2\pi}{N}$$

jeder Osz. hat andere Phase,
aber immer den gleichen Abstand
zum Nachbarn (next-to-neighbor)
Kaskadell



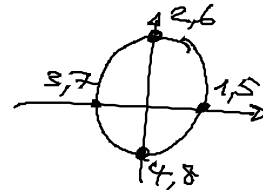
Bem.: für $N=2$ entspricht Splay-Zustand
der gegenphasigen Lösung $z_1 = -z_2$

$m > 1$

Cluster-Zustände (in Phase innerhalb des Clusters,
konst. Phasendiff. zwischen
Clustern)

Zahl vorhandener Cluster M
geg. durch kleinstes gemeins.
Vielfaches von m und N
geteilt durch m

$$M = \frac{\text{LCM}(m, N)}{m} \quad \text{Least Common Multiple}$$



Beispiel: $N=8, m=2 \Rightarrow M = \frac{\text{LCM}(8, 2)}{2} = \frac{8}{2} = 4$

1) Bestimmen der invar. Lösungen von (I) durch Einsetzen v (II)

$$\Rightarrow \begin{matrix} r_0, m \\ \Omega_m \end{matrix}$$

2) Stabilität der Lösungen mit MSF

} Choe et al (2010)