

6. Zueinander gleichförmig geradlinig bewegte Koordinatensysteme:

Unerträglichkeit von Newton- und Maxwellgleichungen

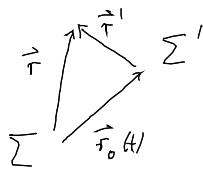
6.1. Galilei Invarianz der Newton Mechanik

Inertialsystem: Koordinatensystem in dem die Newtongleichung in der Form
 (JS) $m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ gilt, wobei \vec{f} die wirkende Kraft ist

Bemerkungen:

- a) es existiert das JS des Fixsternhimels
- b) nicht alle KS sind Inertialsysteme (siehe 5.)
- c) es existieren beliebig viele Inertialsysteme:
 können durch Experimente unterschieden werden
 Beschreibung ist komplett äquivalent

Konstruktion von JS aus JS d. Fixsternhimels:



Frage: Welche solche Bedingung ist die
 Newtongleichg. dieselbe in Σ und Σ' ,
 "Newtongl. ist invariant gegen $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ "

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$$

$\vec{r}_0(t)$ kann eine konstante Geschwindigkeit $\vec{v}_0 \neq 0$ oder $\vec{r}_0(t) = \vec{v} t$, $\vec{v} = \text{Konstant}$

in Σ : $m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}$ Einträge von $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$, mit $\ddot{\vec{r}}_0 = 0$

in Σ' : $m \ddot{\vec{r}}' = \vec{f}'$

offensichtlich ist links die Kraft identisch, Kraft ist ebenso identisch, weil

Paarwechselwirkungen $\vec{f}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \rightarrow \vec{f}(\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_0}_{\vec{r}'_i} - \underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_0)}_{\vec{r}'_j}) = \vec{f}(\vec{r}'_i - \vec{r}'_j)$

invariant gegen die Definition \vec{r}_0 .

Die Transformations $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}_1 - \vec{v}t$

\uparrow \uparrow
 Konstante gleichförmig geradlinig, konstant

heißt Galilei Transformation

Galilei'sches Relativitätsprinzip:

Es gibt so viele IS die sich mit $\vec{v} = \text{konstant}$ gegen einander bewegen,
 können nicht unterschieden werden durch physikalische Experimente.

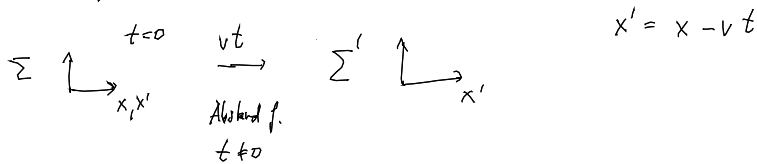
6.2. Probleme f. Maxwellgleichungen bei Galilei Transformation

elektromagnetische Felder genügen den Wellengleichungen: (Vakuum)

dreidimensional $(\nabla_x^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) f(x,t) = 0$ eben Wellen

Lösungen sind $f(x \pm ct)$ f. Vorwärts/Rückwärts laufend Wellen

Anwendung der Galilei Transformation:



in Σ : $f(x - ct)$ in Σ' : $f(x' + vt - ct) = f(x' - \underbrace{(c-v)t}_{c' \neq c})$

steht im Σ' zu Experiment $c = c'!$

- ↳ 2 Optionen:
- a) Elektrodynamik nicht vollständig und nicht im Galilei'schen Rahmen passend
 - b) Mechanik im Σ' modifiziert werden, so daß f. bei (ED + Mech. dieselbe Form gilt)

- Üb 6:
- i) find ein Trafo $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ die c und Maxwellgl. invariant läßt
 - ii) Mechanik modifizieren, also die von Trafo anpassen
 - iii) für fall Newton mechanik diskussion ($\frac{v}{c} \ll 1$)

gute Idee: Waldemar Voigt (1887) : Zeit mit Lorentzformeln

$$x \rightarrow x', \quad t \rightarrow t' \quad \text{mit } t \neq t'$$

Vorweg: $x' = x - vt$ und $ct' = (ct - \frac{v}{c}x)$ | physikalisch
wohl falsch

$$\rightarrow \underline{\underline{(x' - ct')}} = (x - vt - (ct - \frac{v}{c}x)) = \underline{\underline{(x - ct) \cdot (1 + \frac{v}{c})}}$$

Forderung an Trafo: f. Wellenberge:

$$c = \frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} \quad \rightarrow$$

gültige folgende Darstellung der Forderung: $x'^2 - c^2 t'^2 = 0 = x^2 - c^2 t^2$

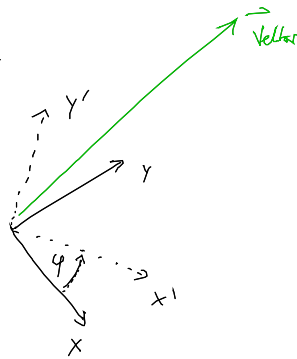
6.3. Herleitung der Lorentztransformation f. Maxwellgl.

Einkopplung: Drehung von x, y -KS um z -Achse

$$x, y \rightarrow x', y'$$

hing $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ist invariant,

aber $x \neq x', y \neq y'$

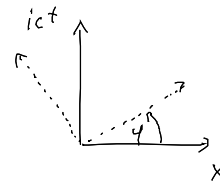


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{überführt } \Sigma, \Sigma' \text{ ineinander (ÜA)}$$

Ähnlich auf $x^2 - ct^2 = x'^2 - c^2 t'^2$ mit $x, y \rightarrow x, y = ict = ct$
 wenn man dies in $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ einsetzt

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(i\varphi) & \sin(i\varphi) \\ -\sin(i\varphi) & \cos(i\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

$$\text{tg } i\varphi = \frac{ict}{x}$$



$$\varphi \rightarrow i\varphi \quad \text{folgt aus: } \frac{\sin i\varphi}{\cos i\varphi} = i \frac{ct}{x} \Leftrightarrow \frac{i \sinh \varphi}{\cosh \varphi} = i \frac{ct}{x} \Leftrightarrow \tanh \varphi = \frac{ct}{x}$$

Ähnlich: $\sinh \varphi / \cosh \varphi$ bzw. $\sin \varphi / \cos \varphi$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Was ist der Winkel φ ? $x' = 0$ hat sich um $x = vt$ zur Zeit t bewegt,
 wenn Σ, Σ' bei $t = 0$ ein gemeinsames Ursprung haben

$$x' = 0 \quad \text{f. oben Zeile: } 0 = \cosh \varphi x - \sinh \varphi ct$$

$$\tanh \varphi = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}$$

$$\text{Additionstheoreme: } \cosh \varphi = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv \gamma$$

$$\sinh \varphi = \frac{v}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \equiv \beta \gamma = \frac{v}{c} \gamma$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

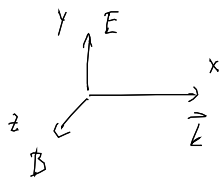
Diese Transformationsformeln heißt Lorentztransformation γ : Lorentzfaktor

$$\begin{array}{l} v \rightarrow c \\ \gamma \rightarrow \infty \\ v \rightarrow 0 \\ \gamma \rightarrow 1 \end{array}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c}x\right)$$

6.4. Lorentztrafo und Maxwellgleichungen

oben links



$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

für den betrachteten Fall

$$\partial_x E = -\partial_t B \quad \text{und} \quad \partial_x B = -\frac{1}{c^2} \partial_t E$$

$$x, t \rightarrow x', t'$$

$$\partial_x = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \quad , \quad \partial_t = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}$$

o/ falsch $x' = x - vt, \quad t = t'$

$$\partial_x = \partial_{x'} \quad , \quad \partial_t = -v \partial_{x'} + \partial_{t'}$$

$$\downarrow \quad \frac{\partial}{\partial x'} (E - vB) = -\frac{\partial}{\partial t'} B \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x'} (B - \frac{v}{c^2} E) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t'}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv E'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\neq B'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{B'} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\neq E'}$

Wicht form invariant!

b/ Lorentz $x' = \frac{x-vt}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$, $ct' = \frac{ct - \frac{v}{c}x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}$

$$\partial_x = \gamma \partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \gamma \partial_{t'} \quad , \quad \partial_t = -\gamma v \partial_{x'} + \gamma \partial_{t'}$$

Anwendung auf $\partial_x E = -\partial_t B$:

$$\left(\gamma \partial_{x'} - \frac{v}{c^2} \gamma \partial_{t'} \right) E = - \left(-\gamma v \partial_{x'} + \gamma \partial_{t'} \right) B \quad , \quad \text{umordnen}$$

$$\underbrace{\partial_{x'} \left(\gamma (E - vB) \right)}_{E'} = - \underbrace{\partial_{t'} \left(\gamma (B - \frac{v}{c^2} E) \right)}_{B'} \rightarrow \boxed{\partial_{x'} E' = -\partial_{t'} B'}$$

Anwendung auf $\partial_x B = -\frac{1}{c^2} \partial_t E \rightarrow \boxed{\partial_{x'} B' = -\frac{1}{c^2} \partial_{t'} E'}$

Man sieht wenn $x, ct \xrightarrow{LT} x', ct'$, so

$$E, cB \rightarrow E', cB' \quad , \quad \text{denn :} \quad \begin{aligned} E' &= \gamma (E - vB) \\ cB' &= \gamma (cB - \frac{v}{c} E) \end{aligned}$$

→ Maxwell-Gl. forminvariant bei LT.