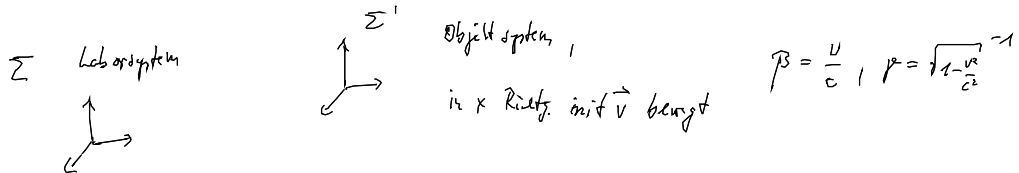


II Spezielle und allgemeine Relativität

für $v \rightarrow c$ werden Alltagserfahrungen ungültig: $t \neq t'$!

Begriffe die in Diskussion zwischen Σ, Σ' verwendet werden sollte kovariant sein

1. Länge- und Zeitmessung unter Lorentztransformation



$$\left. \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Hin} \\ \text{Rück} \end{array} \left. \begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{array} \right\} \begin{array}{l} dx'^2 - c^2 dt'^2 = dx^2 - c^2 dt^2 \\ = \text{invariant ist} \\ \text{dadurch sichergestellt.} \end{array}$$

typische Fragen:

a) Ist Feststellung, daß Gegenstand in verschiedene Zeiten sich an selbe Ort befindet sich sinnvoll?

Gegenstand bei $x=0$ in Σ

f. $t=0$ Start des Bewegg. $x = x' = 0$

f. $t > 0$ $x' = -\gamma vt$, $x = 0$ $x \neq x'$

→ nicht sinnvoll! gilt für LT und GT

b) Ist Feststellung, daß 2 Ereignisse an verschiedene Orten $x_a \neq x_b$ gleichzeitig stattfinden, sinnvoll?

$$\begin{array}{ll} \Sigma: x_a \neq x_b & \Sigma': x'_a, x'_b \\ t_a = t_b & t'_a \stackrel{?}{=} t'_b \\ \text{gleichzeitig!} & \text{auch gleichzeitig?} \end{array}$$

$$ct'_a = \gamma (ct_a - \beta x_a)$$

$$ct'_b = \gamma (ct_b - \beta x_b)$$

Differenzial sieht die in Σ gleichzeitig
 statt finden Ereignisse in Σ' nicht gleichzeitig.

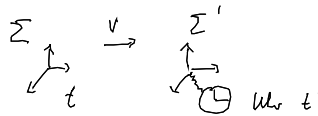
$$c(t'_a - t'_b) = \beta (x_b - x_a) \neq 0$$

Begriff der Gleichzeitigkeit verliert seine!

$$\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 0 \text{ aber GT stellt gleichzeitig wieder her}$$

$v \ll c$

c) Zeitdilatation:



in Σ sieht man bewegte Uhr
 in Σ' sieht man ruhende Uhr

Beobachtung v. Zeitintervallen in Σ, Σ' : $\Delta t, \Delta t'$

$$\Delta t = t_E - t_A, \quad \Delta t' = t'_E - t'_A$$

A, E : Anfang und Ende eines
 physikalischen Prozesses

Rückhafte: $ct'_E = \gamma (ct_E + \beta x'_E)$

$$ct'_A = \gamma (ct_A + \beta x'_A)$$

$x'_E = x'_A$ weil Uhr / physikalischer Prozess
 find in mit bewegt KS Σ' statt

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad \gamma > 1 \Rightarrow \boxed{\Delta t > \Delta t'}$$

Zeitintervall der bewegte Uhr (in Σ bewegt)
 Zeitintervall der ruhenden Uhr (in Σ' fest)

↑
 Vorgang schneller

i) Jede Uhr / Vorgang geht am schnellsten wenn sie/er mit dem ruhenden Beobachter verbunden ist (Σ')

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}, \text{ bewegte Uhr geht langsamer!}$$

ii) Die Zeit die mit der fest verbundenen Uhr d. Beobachters abläuft heißt „Eigenzeit“.

Beispiel: Zerfall von Mesonen, leben mit $\tau_L = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ und machen 100 km Strecke in 12 km Höhe mit Aufwindgeschwindigkeit $3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$
 das Bewegung mit v auf Σ, Σ' in einem Koordinatensystem

GT $x = x' + vt' \mid_{x'=0} \text{ (mit Teilchen verknüpftes System } \Sigma') = \underline{\underline{600 \text{ km}}}$
 \uparrow $t' = \tau$

Strecke die Teilchen zurücklegen kann

Elementarfeldchen dürfte nicht nachgewiesen werden

LT $x = \gamma (x' + vt')$ $\mid_{x'=0} = \underline{\underline{12 \text{ km}}}$ \rightarrow Korrektur des LT ist wichtig um zu verstehen, wann das Teilchen Erdoberfläche erreicht.
 $t' = \tau_L$ $\gamma \approx 10$

d) Längenkontraktion (ÜA1)

$\Delta x' = \gamma \Delta x$ $\gamma > 1 \Rightarrow \Delta x < \Delta x'$
 in Σ' messende Länge in Σ bewegte Länge

Bewegung Objekt bedeutet in Bezugssystem veränderlich

e) Addition v. Geschwindigkeiten

ist nicht einfach additiv, muß durch Hilfsrechnen aus folg. v. LT ausgeführt werden

2) Formulierung im Minkowski-Raum

Vier Schichten Ort und Zeit werden verbunden als Vierer-Vektoren

$\Sigma: (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^\mu) \quad \mu = 0, 1, 2, 3$
 griechisch: 0...3, lateinisch: 1, 2, 3

4d Raum $\hat{=}$ Minkowski-Raum

a) Abstände im Minkowski-Raum

Newton: Abstand im Ortsraum: $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \text{invariant f. } \Sigma \rightarrow \Sigma' \text{ (GT)}$

Minkowski: Abstand zw. Vierervektoren: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{invariant f. } \Sigma \rightarrow \Sigma' \text{ (LT)}$

$ds^2 = \sum_{\alpha} dx^{\alpha} dx_{\alpha}$ ist ungenügend weil Vorzeichen nicht stimmt (f. dx^{α} usw)

weil: $x^{\alpha} = (ct, x, y, z)$, $x_{\alpha} = (ct, -x, -y, -z)$

$ds^2 = \sum_{\alpha} dx^{\alpha} dx_{\alpha}$ ist dann richtig definiert und invariant

b) Eigenzeit

$$\sum_{\alpha} dx^{\alpha} dx_{\alpha} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - dr^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{dr^2}{dt^2} / c^2 \right)$$

bisher alle diffbar $\frac{d\vec{r} \cdot d\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v^2(t)$

$\vec{r}(t)$: beobachtete Objekt das sich in Σ bewegt.

$$\Downarrow \frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 \rightarrow \frac{ds}{c} \equiv d\tau = \gamma^{-1} dt = \text{invariant}$$

\nearrow Eigenzeit, die auf Uhr die mit dem Teilchen $\vec{r}(t)$ verbunden ist.

3. Speziell relativistische Dynamik

Newton: t ist in alle Σ gleich

Einstein: τ ist in alle Σ gleich $\rightarrow x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau)$, weil dann 4-vektoriell Lokalisierung

3.1. Viergeschwindigkeit $u^{\alpha}(\tau)$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} x^\alpha(\tau)$$

$$u^\alpha(\tau) = \frac{d}{d\tau} \underbrace{(ct, \vec{r}(t))}_{\text{Vorstellung, dass } t(\tau) \text{ bekannt}} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right) = (c \gamma(t), \vec{v}(t) \gamma(t))$$

Vierimpuls definieren $p^\alpha \equiv m u^\alpha = (m c \gamma, m \gamma \vec{v})$

3.2. Relativistisch dynamische Bewegungsgleichung

Einsteins Ansatz $\frac{d}{d\tau} p^\alpha(\tau) = f^\alpha(\tau)$, Unterschied Newton: 4-Jektor, τ -abhängig

gewünscht Bahnkurve $\vec{r}(t)$

3.2.1. Raumkomponenten

$$\alpha = 1, 2, 3 \quad \frac{d}{d\tau} p^\alpha = f^\alpha \rightarrow \frac{d^t}{d\tau} \frac{d}{dt} p^\alpha = f^\alpha \rightarrow \frac{d}{dt} p^\alpha = \gamma^{-1} f^\alpha$$

$$a) \frac{d}{dt} p^\alpha = \frac{d}{dt} (m v^\alpha(t) \gamma(t)) \quad \Bigg| \text{Produktregel} \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$= m \left(\underbrace{\dot{v}^\alpha \gamma + v^\alpha \dot{\gamma}}_{\text{Newton, offensichtlich viel schwieriger}} \right)$$

$$b) \frac{d}{dt} p^\alpha = \gamma^{-1} f^\alpha \equiv \underbrace{f_N^\alpha}_{\text{Newtonkraft}} \quad \text{Ansatz! rechte Seite} \hat{=} \text{Newtonkraft}$$

$$\Downarrow \frac{d}{dt} (m_{rel}(t) v^\alpha(t)) = f_N^\alpha \quad \text{mit } m_{rel}(t) = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{1/2}}$$

relativist.
Bewegungsgl.
f. Obj. mit
 $\vec{r}(t), \vec{v}(t)$

f. $v \ll c$ gilt $m = m_{rel}$: Newtongrenzfall