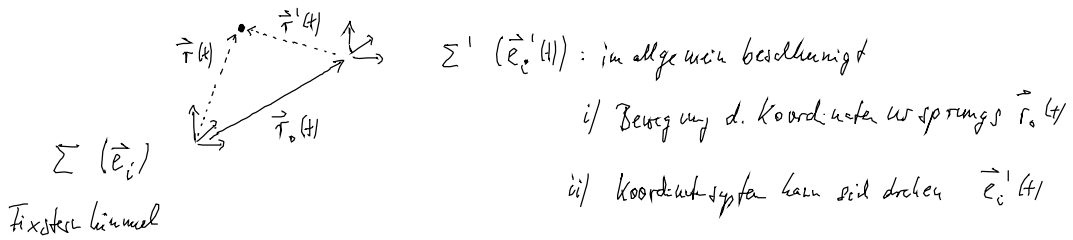


5. Beschleunigte Koordinatensysteme der Newtonmechanik

5.1. Umrechnung zwischen den Koordinatensystemen



↓ Newtongleichung gilt
 $m \ddot{\vec{r}} = \vec{f}$: einprägige Kraft
 ($\hat{=}$ Inertialsystem)

ein Massenpunkt P mit Masse m erfährt:
 $\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}_0(t) + \ddot{\vec{r}}'(t)$

Ziel: Herleitung einer Bewegungsgleichung für $\ddot{\vec{r}}'(t)$, wenn man in Σ' beobachtet ist

Wiese: Newtongleichg. in Σ , Ziel: $\ddot{\vec{r}}'(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}'(t) \quad \text{in } \Sigma' \text{ gilt: } \dot{\vec{r}}'(t) = \sum_i x_i'(t) \dot{\vec{e}}_i'(t)$$

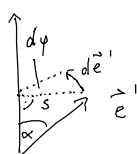
$$= \dot{\vec{r}}_0 + \sum_i \left(\dot{x}_i' \vec{e}_i' + x_i' \dot{\vec{e}}_i' \right)$$

↑ Translationsschwindigkeit Σ'
 $\dot{x}_i' \hat{=}$ Geschwindigkeit des MP die der rotierend Beobachter in Σ' misst.
 $\dot{\vec{e}}_i' \hat{=}$ Rotation ausblei, genau untersuchen

$\dot{\vec{e}}_i' = ?$, für $\vec{\omega}(t)$: momentane Winkelgeschwindigkeit von Σ'

betrachtet Drehg. $d\varphi \perp$ zu $\vec{\omega}$ pro Zeiteinheit $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$\vec{\omega}(t)$



$$d\vec{e}_i' = s d\varphi \vec{f}_0 \quad (\vec{f}_0: \text{Einheitsvektor } \perp \text{ zu } \vec{\omega} \text{ und } \vec{e}_i')$$

$|\vec{e}_i'| s \sin \alpha \quad |\vec{\omega}(t)| dt$: stellt Kreuzprodukt dar!

$s \perp$ Abstand von $\vec{\omega}$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_i'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}_i'}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \underbrace{\frac{\dot{\vec{r}}'(t)}{\text{Ableit. von } \vec{r}' \text{ in } \Sigma'}} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)}_{\text{rot.}}$$

Ziel ist jetzt f. \vec{r}' in Σ'
 f. Bestände mit feststehenden \vec{e}_i'

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + \ddot{\vec{r}}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \dot{\vec{\omega}} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')$$

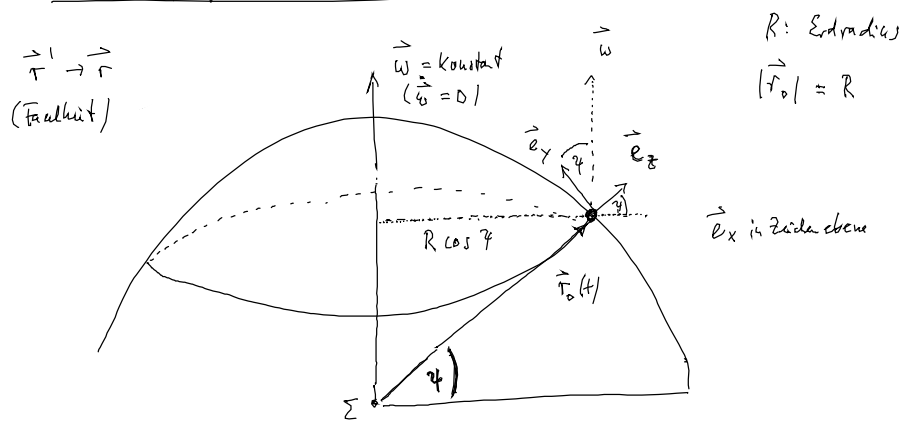
Wiss: $m\vec{r} = \vec{f}$ aus eingepreigt Kräfte, mit m multiplizieren, nach \vec{r}' umstellen

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)}_{\text{eingepreigt Kräfte in } \Sigma' \text{ Koordinate}} - \underbrace{m\ddot{\vec{r}}_0}_{\text{Translation von } \Sigma'} - \underbrace{2m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')}_{\text{Corioliskraft } \neq 0 \text{ f. } \dot{\vec{r}}' \neq 0} - \underbrace{m(\dot{\vec{\omega}} \times \dot{\vec{r}}')}_{\text{Winkelbeschleunigungs-Kraft}} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}}$$

Zusätzlich Kräfte im beschleunigten KS Σ'

- Scherkräfte: ungünstiges KS Σ' fängt die vor
- Trägheitskräfte: stellen Trägheitsgesetz im Bezugssystem sicher bei Beobachtung in Σ'

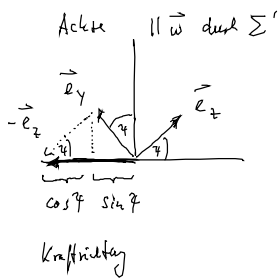
5.2. Bewegung auf rotierender Erde



gemäß Bolekulore: $m \ddot{\vec{r}} = -m g \vec{e}_z - m \ddot{\vec{r}}_0 - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}})$ f. $\dot{\vec{\omega}} = 0$

- Fraktionen a) Kreisbeweg. b) Zentrifugal c) Coriolis
 (f) d. Krümmung

a) Beschleunigung Koordinate Ursprung: $\ddot{\vec{r}}_0 = \omega^2 R \cos \varphi (0, \sin \varphi, -\cos \varphi)$

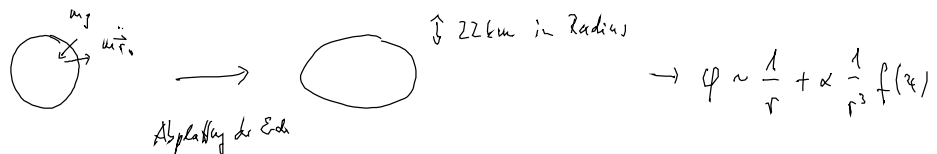


Bekanntes Projektion des nach innen gerichteten Kraft ist radial Zirkump vector

$$m \ddot{\vec{r}} \Big|_{\vec{r}_0} = -m \ddot{\vec{r}}_0 = -m \omega^2 R \cos \varphi (0, \sin \varphi, -\cos \varphi)$$

Kraft auf MP auf Oberfläche wirkt nach außen: "Zentrifugalkraft" (weiter)

off wird $-m g \vec{e}_z - m \ddot{\vec{r}}_0$ zusammengefasst zu einer effektiven Totbeschleunigung, diese ist φ , also breitenabhängig



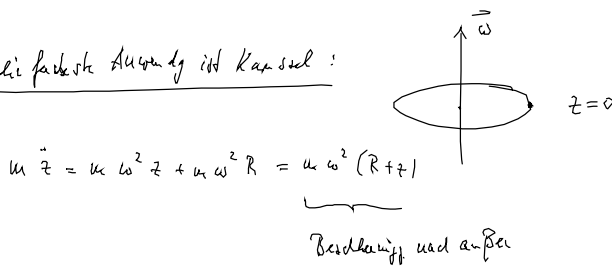
b) Zentrifugalkraft \vec{f}_z

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \omega^2 \vec{r}$$

f. Skalarprodukt: $\vec{r} = (x, y, z)$ und $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_x + \omega \cos \varphi \vec{e}_y + \omega \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) \vec{e}_z$
 $\vec{\omega} = \omega (0, \cos \varphi, \sin \varphi)$

$$\vec{f}_z = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m \omega^2 (-x, -\sin^2 \varphi y + \cos \varphi \sin \varphi z, \sin \varphi \cos \varphi y - \cos^2 \varphi z)$$

die faktische Auswirkung ist Krümmung:



$$m \ddot{z} = m \omega^2 z + m \omega^2 R = m \omega^2 (R+z)$$

c) Coriolis kraft: für bewegte Objekte relevant \vec{f}_c

$$\vec{f}_c = -m \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \cos \varphi \dot{z} - \sin \varphi \dot{y} \\ \sin \varphi \dot{x} \\ -\cos \varphi \dot{x} \end{pmatrix}$$

Wichtigkeit v. \vec{f}_c durch Größenordnungsabschätzung:

$$m \omega^2 |\vec{r}| \ll m \omega |\dot{\vec{r}}| \ll m g \text{ effektiv}$$

$$\text{Werte: } \omega = 10^{-5} \frac{1}{s}$$

Zulieferer Coriolis effektiv Gravitation

$$\underbrace{\omega r \ll \dot{r}}_{10^{-5} \frac{m}{s} \ll \frac{m}{s}} \quad \underbrace{r \approx 1m}_{t \approx 1s} \rightarrow \dot{r} = 1 \frac{m}{s}$$

genau Diskussion Coriolis kraft:

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{x} &= -2m\omega (\cos \varphi \dot{z} - \sin \varphi \dot{y}) \\ m \ddot{y} &= -2m\omega \sin \varphi \dot{x} \\ m \ddot{z} &= 2m\omega \cos \varphi \dot{x} - mg \end{aligned} \right\}$$

ist halt zu lösen,
weil lineares Dgl.-System

1. Bsp: Dstabweichung kein freier Fall in Näherungstheorie, Störung: Scheinkräfte

$$\text{ohne Störung} \quad z^{(0)} = h - \frac{g}{2} t^2, \quad x^{(0)} = 0, \quad y^{(0)} = 0$$

$$\text{mit Störung, 1. Ordnung:} \quad x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)}, \quad y = y^{(0)} + \varepsilon y^{(1)}, \quad z = z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)}$$

durch, Potenz in ε heben, wobei $\vec{f}_c \rightarrow \varepsilon \vec{f}_c$

$$m \ddot{x}^{(1)} = 2m\omega \cos \varphi g t \quad \rightarrow \quad x^{(1)} = \omega \cos \varphi g \frac{t^3}{3}$$

$\hat{=}$ Dstabweichung in \vec{e}_x -Richtung.

existiert auf beiden Halbkugeln ($\cos \varphi$).

2. Bsp.: Ableitung v. horizontaler Bewegung, $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, keine Funktion

$$m \ddot{z} = 0$$

$$m \ddot{x} = 2m \omega \sin \varphi \dot{y}$$

$$m \ddot{y} = -2m \omega \sin \varphi \dot{x}$$

Behauptung: $m \ddot{\vec{r}} = -2m \vec{\omega}_h \times \dot{\vec{r}}$

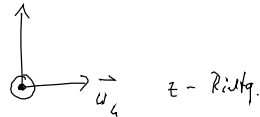
$$\vec{\omega}_h = \omega \sin \varphi \vec{e}_z$$

Beweis: ausrechnen d. Kreuzprodukts über Determinante

$$\vec{f}_c = -2m \vec{\omega}_h \times \dot{\vec{r}}$$

Nordhalbkugel $\sin \varphi > 0$: Rechts ablenk.

Südhalbkugel $\sin \varphi < 0$: Links ablenk.



Wichtig: Meeresströmungen, Wind, Badewanne

3. Bsp. \vec{u}_A : Foucault'scher Pendel $\ddot{x} = -\frac{g}{L} x$, $\ddot{y} = -\frac{g}{L} y$ mit Schwerkraft