

# 6.3.1. Externe Kavitätsmoden beim Laser + Feedback

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E} = (1 + i\alpha) n E + k e^{-iC} E(t - \tau) \quad (I)$$

$\tau$ : dimensionslos  $\frac{\tau}{\tau_{ph}} = \tau$

$$\frac{dn}{dt} = \dot{n} = \gamma (j - n - (1 + 2n) |E|^2) \quad (II)$$

$\gamma \rightarrow$  Zeitskalenparameter  $\frac{\tau_{ph}}{T_1} = \gamma \left( \approx \frac{1}{T} \right)$  üb.

LK-Gleichungen

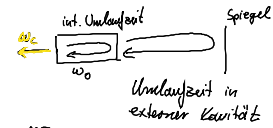
$C$ : Rückkopplungsphase  $[C = \omega_0 \cdot \tau]$   
 $k$ : " " Stärke

Fixpunkte?

$S^1$  - Symmetrie der LK-Gleichungen

(Phasenrotation lässt Gleichungen invariant) Transformation  $E \rightarrow cE$  mit  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|c|=1$  lässt Gleichungen invariant.

Ansatz für stabile Lösungen (Index  $c$ )



$$E = \sqrt{I_c} e^{i(\omega_c - \omega_0)t} \quad \leftarrow \text{konstante Frequenz \& Intensität } I_c = E_c^* E_c$$

$$n = n_c \quad \leftarrow \text{konstante Inversion } [n = \tilde{n} - n_{th}]$$

ECM: External cavity mode  $(I_c, \omega_c, n_c)$

Einsetzen in (I),(II):

$$(I) \rightarrow \sqrt{I_c} i(\omega_c - \omega_0) = (1 + i\alpha) n_c \sqrt{I_c} + k e^{-iC} \sqrt{I_c} e^{-i(\omega_c - \omega_0)\tau}$$

$$(II) \rightarrow n_c = j - (1 + 2n_c) I_c$$

$\omega_0$ : Frequenz ohne Rückkopplung  
 $\omega_c$ : Mode mit Rückkopplung

Suche  $\omega_c$ , welches Gleichungen erfüllt  $\hat{=}$  Moden

Realteil (I) :  $n_c \sqrt{I_c} + k \sqrt{I_c} \cos(\omega_c \tau) = 0$

$$\rightarrow n_c = -k \cos \omega_c \tau$$

für  $k=0$  ist  $n_c=0$

d.h. Feedback wirkt je nach  $\omega_c \tau$  als Verlustterm oder verstärkend (konstruktive oder destruktive Interferenz)

Imag.(I) :  $\omega_c - \omega_0 = \alpha n_c - k \sin \omega_c \tau$

$$\omega_c - \omega_0 = -\alpha k \cos \omega_c \tau - k \sin \omega_c \tau \quad *$$

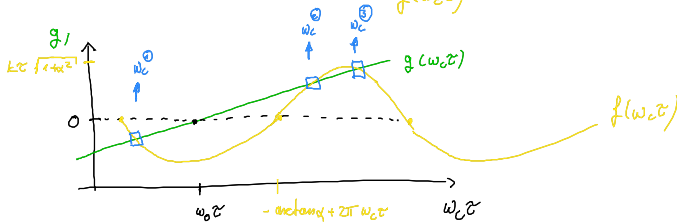
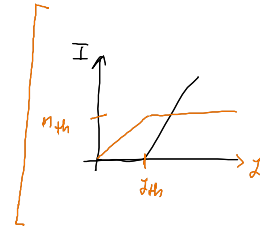
Bestimmungsgleichung für Frequenz  $\omega_c$

$$(II) : I_c = \frac{j + k \cos \omega_c \tau}{1 - 2k \cos \omega_c \tau} = \frac{j - n_c}{1 + 2n_c}$$

Lösung von  $(*)$ :

- analytisch schwierig da transzendent
- besser grafisch

$$\begin{aligned} g(\omega_c \tau) \\ \tau(\omega_c - \omega_0) &= -k\tau (\alpha \cos \omega_c \tau + \sin \omega_c \tau) \\ &= -k\tau \sqrt{1+\alpha^2} \sin(\omega_c \tau + \arctan \alpha) \end{aligned}$$



- mit  $k$  entstehen immer neue Lösungen in SN Bifurkationen
- SN Bifurkation ist erreicht wenn Ableitung von  $g, f$  gleich sind:

$$\rightarrow \frac{\partial g}{\partial \omega_c \tau} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_c \tau} \stackrel{!}{=} 1$$

$$1 = k\tau (\alpha \sin \omega_c \tau - \cos \omega_c \tau) \quad (**)$$

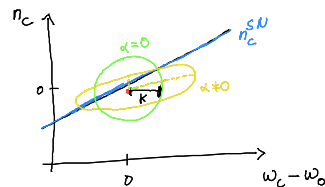
$$\frac{1}{k\tau} + \cos \omega_c \tau = \alpha \sin \omega_c \tau$$

$\rightarrow$  Inversion  $n_c^{SN}$  an der SN-Bifurkation bestimmt über  $\text{Re}, \text{Im}(I)$  mit Bedingung  $(**)$

$$\Rightarrow 1 = \alpha (\omega_0 \tau - \omega_c \tau + \alpha \tau n_c^{SN}) + \tau n_c^{SN}$$

Sattel-Knoten Linie im Parameterraum

$$n_c^{SN} = \frac{1 + \alpha (\omega_0 \tau - \omega_c \tau)}{\tau (1 + \alpha^2)}$$



•  $n_c = 0$   
 $\omega_c = \omega_0$  ist stationäre Lösung ohne Feedback

Wo liegen die Lösungen  $\omega_c$  im Phasenraum?

$$1 = \cos^2 + \sin^2$$

$$= \cos^2 \omega_c \tau + \sin^2 \omega_c \tau$$

$$n_c = -k \cos \omega_c \tau$$

$$\omega_c \tau - \omega_0 \tau - \alpha \tau n_c = -k \tau \sin \omega_c \tau \quad (\text{das ist bl. *})$$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{n_c}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega_c \tau - \omega_0 \tau - \alpha \tau n_c}{k\tau}\right)^2$$

Fall:  $\alpha = 0$

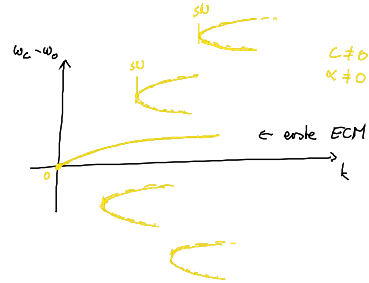
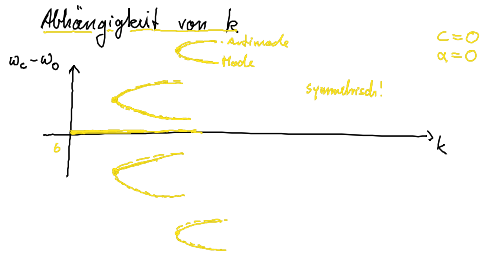
$$1 = \left(\frac{n_c}{k}\right)^2 + \left(\frac{\omega_c - \omega_0}{k}\right)^2 \quad \text{Kreisgleichung}$$

$\alpha \neq 0$

$$k^2 = (\omega_c - \omega_0)^2 + n_c^2 (1 + \alpha^2) - 2\alpha (\omega_c - \omega_0) n_c \rightarrow \text{Ellipsengleichung}$$

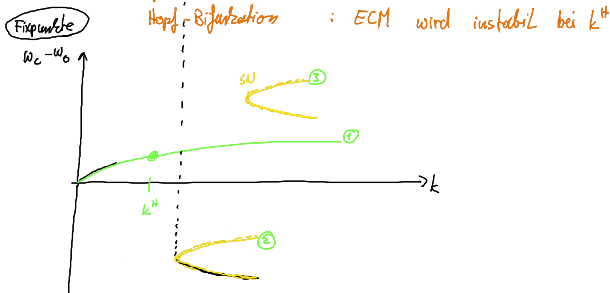
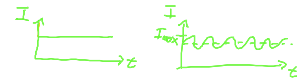
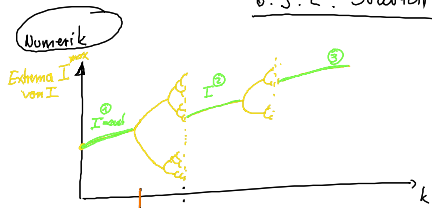
$\Rightarrow$  Lösungen von  $\textcircled{*}$  liegen auf einer Ellipse im  $(\omega_c - \omega_0, n_c)$  Phasenraum

- Ausdehnung wächst mit  $k$
- $\alpha$  ändert die Form der Ellipse



- Multistabilität wächst mit steigendem  $k$
- Stabilität der Lösungen wäre noch zu bestimmen

### 6.3.2. Stabilität der ersten ECM



### Analytik

Bestimmung der Hopf-Bifurkation der ersten ECM

Methoden zum Auffinden der Hopf-Bifurkation

- 1) Linearisieren  $\rightarrow$  charakt. Polynom  $\rightarrow$  Suche EW mit  $\lambda = \pm i\omega$   
 Problem: Delay macht Analyse schwierig  $\rightarrow$  asymptotische Entwicklung nötig

2) Neu:

Bedingung an  $k$  über Existenzbedingung von period. Lösungen

Satz: Ein System  $L\underline{x} = \underline{f}$  (z.B.  $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x} + \underline{f}$ ) hat genau dann eine periodische Lösung, wenn die Lösung des adjungierten <sup>homogenen</sup> Problems (hier  $\dot{\underline{x}}^* = -D^T(t)\underline{x}^*$ ) die Bedingung  $\langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle = 0$  erfüllt.

Voraussetzung:  $\dot{\underline{x}} = D(t)\underline{x}$ , also  $L\underline{x} = 0$   
hat eine periodische Lösung.

Beweis: Sei  $L\underline{x} = \underline{f}$   
 $L^* \underline{x}_0^* = 0$

P: Periode von  $\underline{x}_0$ ,  $L\underline{x}_0 = 0$

Def.: adjungierter Operator

$$\langle \underline{x}, L\underline{y} \rangle = \langle L^* \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

$\underline{x}_0$  ist Lösung des homogenen Problems

$\underline{x}_0^*$  ist Lösung des homogenen adjungierten Problems

$$\begin{aligned} \langle \underline{x}_0^*, \underline{f} \rangle &= \int_0^P (\underline{x}_0^* \cdot \underline{f}) dt \\ &= \int_0^P (\underline{x}_0^* \cdot L\underline{x}) dt \\ &= \int_0^P \underbrace{(L^* \underline{x}_0^* \cdot \underline{x})}_0 dt = 0 \quad \square \end{aligned}$$