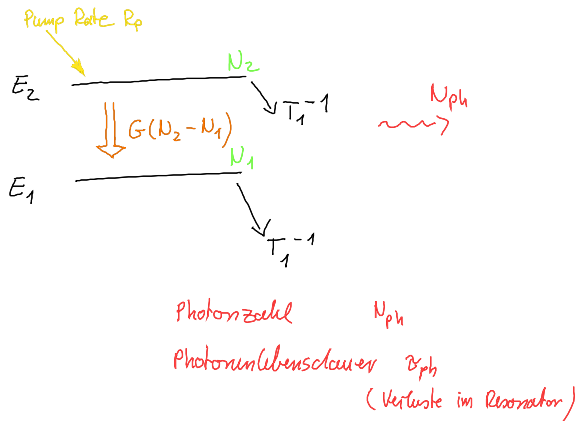


4. Nichtlineare Dynamik am Beispiel des Lasers

4.1. Laser - Ratengleichungen



- 2 Niveaus-System E_2, E_1
 N_2, N_1 Besetzung der Niveaus
 $N_2 - N_1$: Inversion
- Lebensdauer der Ladungsträger T_1
- G Verstärkung
 (Licht-Materie Wechselwirkung)
 durch stimulierte Emission und Absorption
- Pump Rate R_p um 2 Niveaus-System aus dem Gleichgewicht zu bringen, d.h. zu invertieren

Bilanzgleichungen (Licht-Materie WW)

$$\frac{dN_{ph}}{dt} = G(N_2 - N_1) N_{ph} - \frac{N_{ph}}{\tau_{ph}}$$

Inversion $\bar{D} = N_2 - N_1$

$$\frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{1}{T_1} (D_0 - \bar{D}) - 2G\bar{D}N_{ph}$$

Dynamik der mittleren Besetzungszahlen und mittlere Photonzahlen in der Kavität.

$D_0 = R_p T_1$ normierte Pumprate

Dimensionslose Formulierung

$$I = 2GT_1 N_{ph}$$

$$D = G\tau_{ph} \bar{D}$$

$$t = \frac{t'}{\tau_{ph}}$$

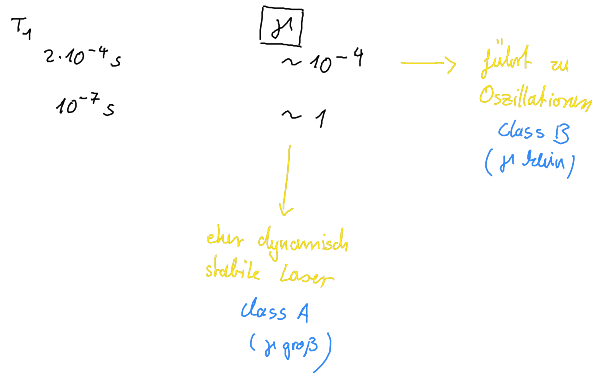
$$y = \frac{\tau_{ph}}{T_1}$$

$$P = G\tau_{ph} R_p T_1$$

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \dot{I} = I(D - 1) & \text{(I)} \\ \frac{dD}{dt} = \dot{D} = y(P - D(1 + I)) & \text{(II)} \end{cases}$$

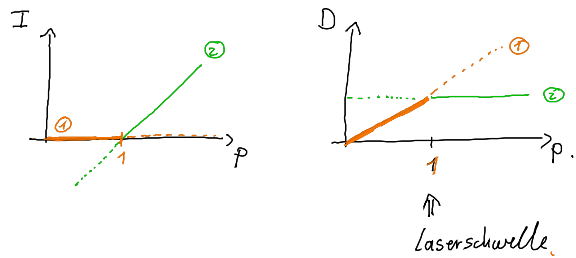
Beispiele für modulierte Laser

Festkörperlaser	$\tau_{ph} \sim 10^{-8} s$	$T_1 \sim 2 \cdot 10^{-4} s$
He-Ne Gaslaser	$2 \cdot 10^{-7} s$	$10^{-7} s$



Stabilitätsanalyse von (I), (II)

Fixpunkte $\textcircled{1} I=0, D=P$
 $\textcircled{2} I=P-1, D=1$



Stabilität $DF = \begin{pmatrix} D-1 & I \\ -D\gamma & -(1+I)\gamma \end{pmatrix}$

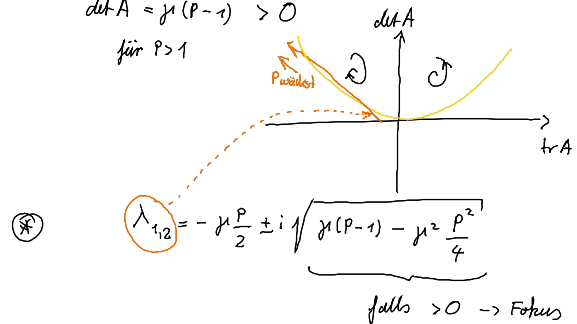
$A|_{\textcircled{1}} = \begin{pmatrix} P-1 & 0 \\ -P\gamma & -\gamma \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda_1 = P-1$ stabil für $P < 1$
 $\lambda_2 = -\gamma$

$A|_{\textcircled{2}} = \begin{pmatrix} 0 & P-1 \\ -\gamma & -P\gamma \end{pmatrix}$

$\rightarrow \lambda^2 + \gamma P \lambda + \gamma(P-1) = 0$

$\text{tr} A = -\gamma P < 0$
 $\text{det} A = \gamma(P-1) > 0$
 für $P > 1$



Grenzfälle

1) gamma klein : Taylorentwicklung der Wurzel von $\textcircled{*}$

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x f'(x_0)$

d.h. $\sqrt{\gamma} \sqrt{\underbrace{(P-1)}_{x_0} - \underbrace{\gamma \frac{P^2}{4}}_{\Delta x}}$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \frac{P}{2} \pm i \sqrt{\gamma(P-1)} + \mathcal{O}(\gamma^{3/2})$$

Dämpfungsrate
 $\Gamma = -\gamma \frac{P}{2}$

Relaxationsfrequenz

$$\omega_{RO} = \sqrt{\gamma(P-1)}$$

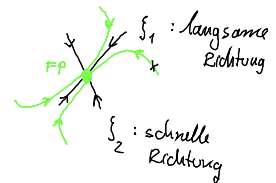
d.h. stabiler Fokus für $P > 1$

2) $(P-1)$ klein, d.h. „in der Nähe der Schwelle $P=1$ “

wieder Taylor, diesmal $\Rightarrow x = \gamma(P-1)$
 $x_0 = \frac{\gamma^2 P^2}{4}$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} P \pm \sqrt{\gamma^2 \frac{P^2}{4} - \gamma(P-1)}$$

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{\gamma P}{2} \pm \left(\underbrace{\frac{\gamma P}{2}}_{f(x_0)} - \underbrace{\gamma(P-1)}_{\Rightarrow x} \underbrace{\frac{2 \cdot 1}{\gamma P}}_{f'(x_0)} \right)$$

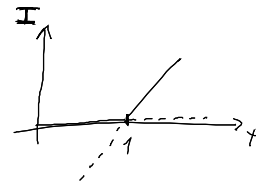


$$\lambda_1 = -\frac{P-1}{P} \quad (\text{langsam da } \lambda_1 \approx 0)$$

$$\lambda_2 = -\gamma P + \frac{P-1}{P} \quad (\text{schnell})$$

stabiler Knoten für $P > 1$

Bem.: bei $P=1$ ist eine transkritische Bifurkation



Einführung der elektrischen Feldamplitude

$$|E|^2 = I$$

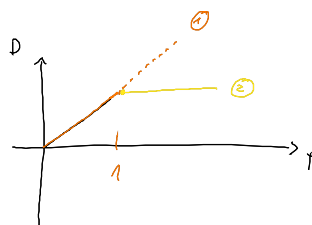
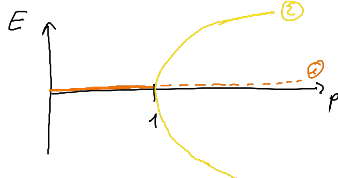
$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} (E^2) = 2\dot{E}E$$

o.B.d.A.
 (Annahme E sei reell)

$$\begin{cases} \text{(I)} & \dot{E} = \frac{1}{2} E (D-1) \\ \text{(II)} & \dot{D} = \gamma (P - D(1+E^2)) \end{cases}$$

Dimensionsbehaftete Größe \bar{E}
 $E = \sqrt{2G-T_1} \bar{E}$
 $|\bar{E}|^2 = N_{ph}$

Stationäre Lösungen (Fixpunkte)



① $E=0, D=P$

② $E = \pm \sqrt{P-1}, D=1$

immer stabil
 ($P < 1$ existiert er nicht)

- An der Schwelle ist eine Pitchfork - Bifurkation

4.2 Normalform der Laser-Ratengleichungen an der Schwelle

Asymptotische Entwicklung

► Def.: Die Summe $\sum_{n=1}^N f_n(\epsilon)$ heißt asymptotische Entwicklung für $\epsilon \rightarrow 0$, wenn

$$\frac{f(\epsilon) - \sum_{n=1}^N f_n(\epsilon)}{f_N(\epsilon)} \rightarrow 0 \quad \text{d.h. Die Abweichung vom der wahren Fkt. } f \text{ ist kleiner als der letzte Term der Entwicklung.}$$

üblicherweise Entwicklung in Potenzreihe

$$f(\epsilon) \approx \sum_{n=1}^N a_n \epsilon^n \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{z.B.} \\ f(\epsilon) \approx E \\ a_1 \approx E_1 \\ a_2 \approx E_2 \end{array} \right)$$

Für Lasergleichung in der Nähe der Schwelle: $P-1$ klein

Ansatz für Lasergleichung

$$E = \epsilon E_1^{(\epsilon)} + \epsilon^2 E_2^{(\epsilon)} + \epsilon^3 E_3^{(\epsilon)} + \dots$$

$$D = 1 + \epsilon D_1 + \epsilon^2 D_2 + \epsilon^3 D_3 + \dots$$

(ungestörtes Problem, $\epsilon=0$ heißt $P=1 \rightarrow E=0, D=1$)

kleiner Parameter $P-1 = \epsilon p_1 + p_2 \epsilon^2 + \dots$

Zeitabhängigkeit? 1. Möglichkeit $E_1(t), E_2(t), E_3(t), D_1(t), \dots$

\rightarrow ergibt keine entkoppelte Gleichungen

2. Möglichkeit: Vielzeitemansatz $\hat{=}$ Zeitskalen als unabhängige Variablen

$$\tau_1 = \epsilon t \quad \text{"langsam"}$$

$$\tau_2 = \epsilon^2 t \quad \text{"noch langsamer"}$$

:

$$\tau_n = \epsilon^n t$$

$$\Rightarrow E(t) = E(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$$

Kettenregel beim Ableiten

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial E}{\partial \tau_2} + \epsilon^3 \frac{\partial E}{\partial \tau_3} + \dots$$

$$E_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$

$$E_2(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$

$$D_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots)$$