

Fortsetzung 3.2. Stochastische DGL

Bsp.: \square 1-dim.
 $b = \text{const.}$
 $a(x) = a \cdot x \quad a < 0$
 Lineare SDE

$$dx = a(x) dt + \overbrace{b}^{\text{Inhomogenität}} dW$$

$X(t)$: Zufallsvariable
 (Pfad)

Mittelwert: $\langle X \rangle = 0$

dW : Wiener Inkrement
 $dW = \int f(t) dt$

Varianz: $\sigma^2 = \Psi(0) = \langle X(t) X(t) \rangle$

$$\Psi(s) = \langle X(t) X(t+s) \rangle$$

Autokorrelationsfunktion

$$= \left\langle b^2 \int_0^t \int_0^{t+s} f(t') f(t'') e^{-at'} e^{-at''} db' dt' db'' dt'' e^{2at+as} \right\rangle$$

schon bekannt
 $X(t) = X^{H(t)} \cdot X_0 + X^{H(t)} \cdot c(t)$
 $c(t) = \int_{t_0}^t b f(s) X^{H(s)} ds$

Gauß'sches Rauschen

$$\delta(t-t') = \langle f(t') f(t'') \rangle$$

$$= b^2 \int_0^t e^{-2at'} dt' \cdot e^{2at+as}$$

vertausche \int und $\langle \rangle$

$$= b^2 \left[\frac{1}{-2a} e^{-2at'} \right]_0^t e^{2at+as}$$

$$= \frac{b^2}{-2a} [e^{-2at} - 1] e^{2at+as}$$

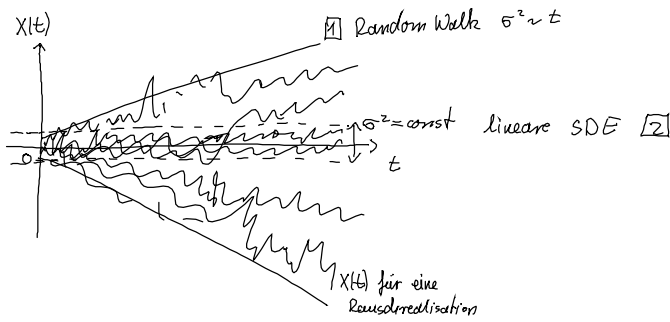
$$= \frac{b^2}{-2a} e^{as} - \frac{b^2}{-2a} e^{2at+as}$$

$\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (und $a < 0$)

$$\Psi(s) = \frac{b^2}{-2a} e^{as}$$

d.h. Varianz

$$\Psi(0) = \sigma^2 = \frac{b^2}{-2a}$$



Bei Interpretation: SDE der Form $dx = a \cdot x dt + b dW$ hat die Varianz eine reziproke Abhängigkeit von a (d.h. vom Eigenwert)
starke Dämpfung \rightarrow kleine Varianz

Bem: Sobald Rauschen betrachtet wird, muss Zeit diskret betrachtet werden

d.h. $\int_0^t F(t') dt' \rightarrow \sum_{t'=0}^t F_{t'}$

d.h. $c(t) = \sum_{t'=t_0}^t b dW_{t'} X_{t'}^{H*}$

$\int dW \int dW = \sum_t dW_t \sum_{t'} dW_{t'} \hat{=} \sum_t$

$\langle (dW_1 + dW_2 \dots) (dW_1 + dW_2 \dots) \rangle$

$\xrightarrow{1}$ $\xrightarrow{0}$

Beispiel 3: mehrdimensionale lineare SDE

$$d\underline{X}_t = \underline{A} \cdot \underline{X}_t + \underline{B} d\underline{W}$$

$d\underline{W}$: mehrdimensionaler Wiener Prozess
 $X_t \in \mathbb{R}^d$

(gleiches Vorgehen wie 1-dim)

Fundamentalsystem der homogenen DGL $\underline{\Phi}(t) = e^{\int_0^t \underline{A}(s) ds} = (e^{\lambda_1 t} \underline{v}_1, e^{\lambda_2 t} \underline{v}_2, \dots, e^{\lambda_n t} \underline{v}_n)$

↑
eine Spalte der Matrix ist eine Eigenlösung ($\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sind Eigenvektoren von \underline{A})

Allgemeine Lösung

$$\underline{X}_t = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{X}_0 + \underbrace{\underline{\Phi}(t) \int_0^t \underline{\Phi}^{-1}(s) \underline{B} f ds}_{\underline{c}(t)} \quad [1D: \int_0^t b_f X_H^*(s) ds]$$

↑
Anfangsbedingungen

$\underline{\phi}^{-1}$ Lösung von

$$-\dot{\underline{X}}_t^* = \underline{A}^* \underline{X}_t^*$$

wobei

$$\langle \underline{A}^* \underline{X}, \underline{Y}^* \rangle = \langle \underline{X}, \underline{A}^* \underline{Y}^* \rangle$$

Mittelwert : $\langle \underline{X}_t \rangle = 0$ (analog zur 10 Argumentation)

Ko-Varianz - Matrix : $\underline{\sigma}^2 = \langle \underline{X}_t \otimes \underline{X}_t^T \rangle$

(dxd) Matrix, wobei
Varianzen der einzelnen Komponenten
auf der Diagonalen stehen.

Bsp. $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\underline{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} \langle x \cdot x \rangle & \langle x \cdot y \rangle \\ \langle y \cdot x \rangle & \langle y \cdot y \rangle \end{pmatrix}$$

$$(t \rightarrow \infty) = \underline{\phi}(t) \int_0^t \left[\underline{\phi}^{-1}(s) \underline{B} \underline{B}^T \underline{\phi}^{-1}(s)^T \right] ds \cdot \underline{\phi}^T(t)$$

$$\underline{\sigma}^2 = \int_0^t e^{\underline{A}(t-t')} \underline{B} \underline{B}^T e^{\underline{A}^T(t-t')} dt'$$

Vorteil: Zur Berechnung der Varianz
muss SDE nicht integriert werden.
=> spart Rechenaufwand

Anwendung: • Linienbreite im Laser kann
aus Varianz der Phase des
E-Feldes berechnet werden

siehe ÜS, A10

• jedes nichtlineare System kann
linearisiert auch mit \otimes
beschrieben werden

3.3. Regularität von stochastischer Dynamik

► Definiere Maß für Regularität

Korrelationszeit

$$t_{cor} = \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^{\infty} |\Psi(s)| ds$$

Autokorrelationsfunktion von $X(t)$

ist $\Psi(s) = \langle X(t) X(t+s) \rangle$

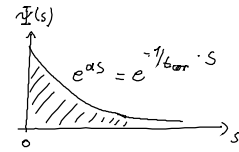
$\langle X \rangle = 0$

Beispiel der linearen SDE $dx = a x dt + D dW$

① für a real

$$\bar{\Psi}(s) = \frac{D^2}{-2a} e^{as} \Rightarrow t_{\text{cor}} = \int_0^\infty |e^{as}| ds = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{as} ds = -\frac{1}{a}$$

Rauschstärke D (vorher b)



② für a komplex

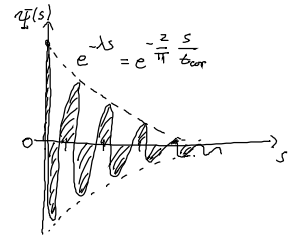
$$a = -(\lambda + i\omega_0)$$

$$\bar{\Psi}(s) = \text{Re} \left[\frac{D^2}{-2a} e^{as} \right]$$

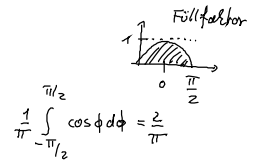
(falls $\lambda \ll \omega_0$)

$$t_{\text{cor}} = \int_0^\infty e^{-\lambda s} |\cos \omega_0 s| ds$$

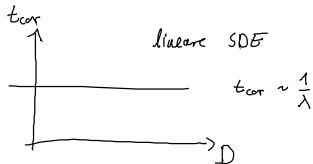
$$\approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda s} ds = \frac{2}{\pi \lambda}$$



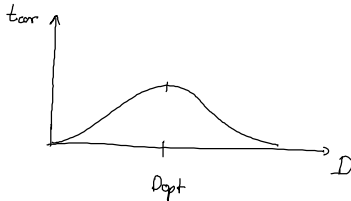
exponentiell abklingende Korrelation auf der Zeitskala t_{cor} .



Für linearen Prozess hängt t_{cor} nicht von Rauschstärke ab!



③ Nichtlineares System : t_{cor} kann von Rauschstärke abhängen

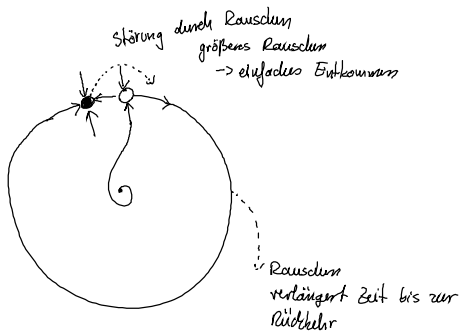


"Kohärenzresonanz" : tritt auf bei anregbaren Systemen
 z.B. • Neuronen → siehe Übung
 • Laser mit optischer Injektion
 ↳ in der Nähe einer SNIPER Bifurkation

Begründung : 2 Zeitskalen, die unterschiedlich die Regelmäßigkeit beeinflussen

z.B. Aktivierungszeit $T_{\text{act}}(D) \searrow t_{\text{cor}}$ besser mit D

Exkursionszeit $T_{\text{exc}}(D) \nearrow t_{\text{cor}}$ schlechter mit D

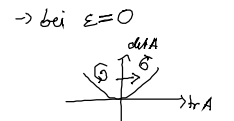
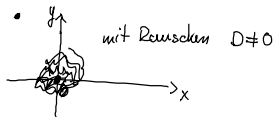


Frage: Wie wirkt Rückkopplungskontrolle auf rauschinduzierte Oszillationen?

Am Beispiel: Van der Pol Oszillator

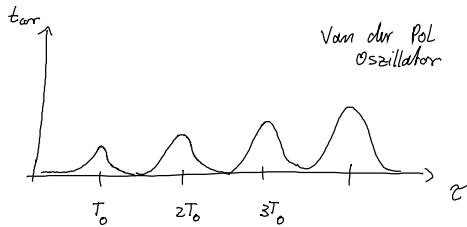
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + K[y(t-\tau) - y(t)] + D\xi(t) \end{aligned}$$

- für $D=0, K=0$: Fixpunkt $x=y=0$, $A = DF|_{FP} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\text{tr} A = \varepsilon$
 $\varepsilon < 0$ Fixpunkt stabil $\text{det} A = \omega_0^2$



- mit Kontrolle $D \neq 0, K \neq 0$

ist Hopf-Bifurkation
 $\varepsilon < 0$: stat. Fixpt
 $\varepsilon > 0$: instab. Fixpt



Verstärkung der Kohärenz durch Delay für geeignete Periode $T_0 \cdot n = \tau$.