

## 5.5. Vielmodenbetrieb der Lasergrundgleichungen

(I)  $\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_n g_{\lambda n} \rho_n$  Feld  $a_\lambda$  einer Mode mit Frequenz  $\omega_\lambda$

(II)  $\dot{\rho}_n = (-i\bar{\omega}_n - \gamma) \rho_n + i \sum_\lambda g_{\lambda n} a_\lambda d_n$  mikt. Polarisation

(III)  $\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} + 2i \sum_\lambda (g_{\lambda n}^* \rho_n a_\lambda^* - c.c.)$  Inversion

### 5.5.1. Bilanzgleichungen im Vielmodenfall (Class B Multimodulaser)

- wir betrachten  $m$  Resonatormoden  $\lambda = 1, \dots, m$

- Ansatz  $a_\lambda(t) = \varepsilon_\lambda(t) e^{-i(\Omega_\lambda t + i\varphi)}$  zeitlich langsam veränderliche Amplitude  $\varepsilon_\lambda(t)$   
 $\rho_n(t) = \sum_\lambda \rho_A^\lambda(t) e^{-i(\Omega_\lambda t + i\varphi)}$  d.h. Polarisation schwingt im Takt mit Feldmoden

→ einsetzen in (II):

$$\sum_\lambda (\dot{\rho}_A^\lambda - i\Omega_\lambda \rho_A^\lambda) e^{-i\Omega_\lambda t} = (-i\bar{\omega}_n - \gamma) \sum_\lambda \rho_A^\lambda e^{-i\Omega_\lambda t} + i \sum_\lambda g_{\lambda n} d_n \varepsilon_\lambda(t) e^{-i\Omega_\lambda t}$$

Koeffizientenvergleich für einzelne Moden (gilt näherungsweise für  $\rho_A(t)$  und  $\varepsilon_\lambda(t)$  langsam gegenüber  $e^{-i\Omega_\lambda t}$ )

$$\dot{\rho}_A^\lambda = [-i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) - \gamma] \rho_A^\lambda + i g_{\lambda n} d_n \varepsilon_\lambda \quad \gamma = \frac{1}{T_2}$$

Annahme: Polarisation relaxiert schneller als Inversion und Feldmode  $[ \gamma \gg \frac{1}{T_1}, \gamma \gg \kappa ]$

$\dot{\rho}_A^\lambda \approx 0$  auf Zeitskalen größer als  $T_2$  Class B

⊛  $\rightarrow \rho_A^\lambda(t) = \frac{i g_{\lambda n} d_n(t) \varepsilon_\lambda(t)}{i(\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda) + \gamma} \Rightarrow \rho_n = \sum_\lambda \frac{1}{\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda - \gamma} g_{\lambda n} d_n a_\lambda$

Einsetzen von ⊛ in (I) und (III) ergibt:

$$\dot{a}_\lambda = (-i\omega_\lambda - \kappa_\lambda) a_\lambda - i \sum_{n \neq \lambda} \frac{g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n}}{\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda - i\gamma} a_{\lambda'} d_n$$

$$\dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} - 2i \sum_{\lambda \neq \lambda'} \left[ \frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n}^*}{\bar{\omega}_n - \Omega_\lambda + i\gamma} a_{\lambda'}^* a_\lambda - c.c. \right] d_n$$

Frage: welchen Beitrag machen Terme der Form  $a_{\lambda'}^* a_{\lambda}$

Photonenzahl:  $N_{ph}^{\lambda} = S_{\lambda} = a_{\lambda}^* a_{\lambda}$

$$\Rightarrow \dot{S}_{\lambda} = \dot{a}_{\lambda}^* a_{\lambda} + a_{\lambda}^* \dot{a}_{\lambda} = -2\kappa_{\lambda} S_{\lambda} + \sum_{n \neq \lambda'} \left[ i \frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n}^* a_{\lambda} a_{\lambda'}^*}{\bar{\omega}_n - \omega_{\lambda'} + i\gamma_n} - i \frac{g_{\lambda n} g_{\lambda' n} a_{\lambda}^* a_{\lambda'}}{\bar{\omega}_n - \omega_{\lambda} - i\gamma_n} \right] d_n$$

Fall verschwindender Phasenkorrelationen (Gegenteil von Modulkopplung)

Annahme: Phasen versch. Moden sind unkorreliert: Phasemittel mit  $\lambda \neq \lambda'$  verschwindet

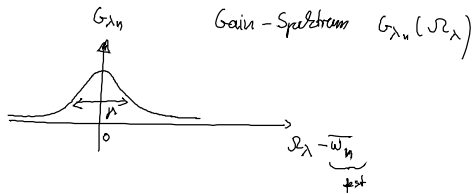
$$\overline{a_{\lambda}^* a_{\lambda'}} = \left( E_{\lambda}^*(t) E_{\lambda'}(t) \right) e^{i(\omega_{\lambda} - \omega_{\lambda'})t} \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\phi_{\lambda} \int_0^{2\pi} d\phi_{\lambda'} e^{i(\phi_{\lambda} - \phi_{\lambda'})}$$

$$= S_{\lambda} \delta_{\lambda\lambda'}$$

Phasemittel auf beiden Seiten der Photonenzahl DGL, und  $d_n$  DGL:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I}^* & \dot{S}_{\lambda} = -2\kappa_{\lambda} S_{\lambda} + S_{\lambda} \sum_n G_{\lambda n} d_n \\ \text{III}^* & \dot{d}_n = \frac{d_0 - d_n}{T_1} - 2d_n \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n} \end{cases}$$

mit  $G_{\lambda n} = \frac{2\gamma_n |g_{\lambda n}|^2}{\gamma^2 + (\bar{\omega}_n - \omega_{\lambda})^2}$   
 ↑  
 Einstein Koeffizient



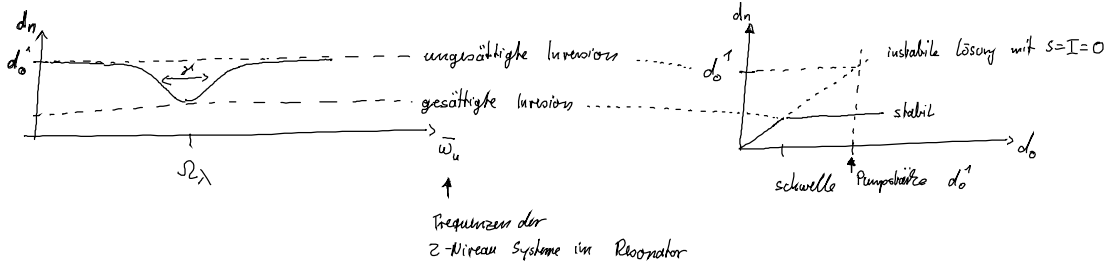
Dynamische Effekte der Gleichungen I\* und III\* ?

Lichtbrennen

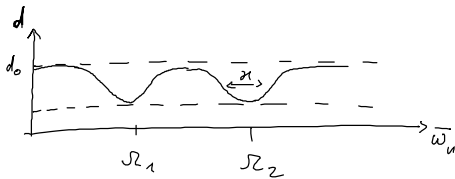
stationäre Zustände von  $d_n$ :  $d_n = \frac{d_0}{1 + 2T_1 \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n}}$

Entwicklung für kleine  $S_{\lambda}$ :  $d_n \approx d_0 \left( 1 - 2T_1 \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda n} \right)$   
 (Licht oberhalb der Schwelle)

a) Spektrales Lochbrennen (durch eine Mode  $S_{\lambda}$ )  
 sei  $|g_{\lambda u}|^2$  ortsunabhängig



2 Moden im Resonator mit  $|\Omega_1 - \Omega_2| \gg \frac{1}{T_2} = \gamma_1$



keine WW der Moden untereinander  
 -> jede Mode hat ihr eigenes Gain Medium

falls  $|\Omega_1 - \Omega_2| < \frac{1}{T_2} \Rightarrow$  Modenwettbewerb

Fall Modenwettbewerb, homogenes Medium:

$$\dot{S}_{\lambda} = (G_{\lambda} D - \kappa_{\lambda}) S_{\lambda} \quad D = \sum_n d_n$$

$$\dot{D} = \frac{D_0 - D}{T} - \kappa D \sum_{\lambda} S_{\lambda} G_{\lambda} \quad G_{\lambda u} = G_{\lambda}$$

stationäre Lösungen:  $S_{\lambda} = 0$  oder  $D = \frac{\kappa_{\lambda_1}}{G_{\lambda_1}} = \frac{\kappa_{\lambda_2}}{G_{\lambda_2}}$  und  $S_{\lambda_1} \neq 0$   
 $S_{\lambda_2} \neq 0$

↑  
 nicht gleichzeitig für mehrere Moden zu erfüllen!  
 ↓

Modenselektion durch den Laserprozess!

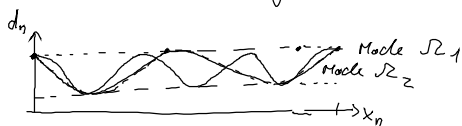
d.h. Laser zuerst (unter der Schwelle) Breitbandverstärker, am Ende gewinnt nur eine Mode (die mit maximalem Gain)

"the winner takes it all"

(falls nur ein homogenes Gain Medium vorhanden ist)

b) räumliches Lochbrennen

inhomogene Lichtverteilung (stehende Welle) führt zu örtlichen Variationen von  $d_n$



$G_{\lambda u}$  räumlich moduliert

-> koexistierende Moden sind möglich

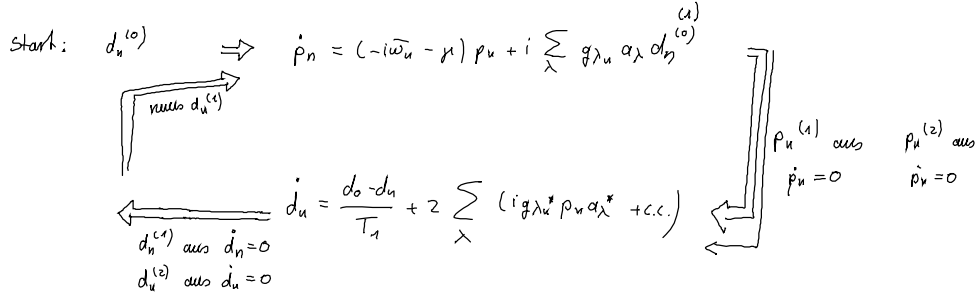
## 5.5.2 Modulkopplung im Vielmodenfall

• numerisch können Gleichungen (I)-(III) gelöst werden (mit zusätzlicher Effekte, der Phasen synchronisiert)

• Analytische Methode für kleine  $S_\lambda$  knapp über der Schwelle, homogenes Medium

$$0 = \sum d_n$$

Iterative Lösung Schema:



Ausgeführt bis zur 2. Iteration

$$p_n = \sum_\lambda p_n^\lambda e^{-iJ_2 \lambda t + i\mu t}$$

0. Näherung  $d_n^{(0)} = d_0$  ungesättigte Inversion

1. Iteration  $p_n^{(1)} = d_0 \sum_\lambda \frac{g_{\lambda n}}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} a_\lambda(t)$

$$\Rightarrow d_n^{(1)} = d_0 \left( 1 - 2 \sum_{\lambda \lambda'} (g_{\lambda n}^* g_{\lambda' n} a_{\lambda'}^* a_\lambda M_{\lambda \lambda'}^n + c.c.) \right)$$

$$M_{\lambda \lambda'}^n = - \frac{i}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} \cdot \frac{1}{T_1 + i(J_2 \lambda - J_2 \lambda')}$$

2. Iteration  $p_n^{(2)} = d_0 \sum_\lambda \frac{g_{\lambda n}}{\bar{\omega}_n - J_2 \lambda - i\mu} a_\lambda - 2d_0 \sum_{\lambda \lambda'} i g_{\lambda u} g_{\lambda' u} g_{\lambda'' u} a_\lambda a_{\lambda'} a_{\lambda''} \cdot \bar{M}_{\lambda \lambda' \lambda''}^n$

$\uparrow$   
 lineare Suszeptibilität ( $p = \chi^{(1)} E$ )

$\uparrow$   
 nichtlineare Suszeptibilität ( $p = \chi^{(3)} E^3$ )

$\uparrow$   
 folgt durch Einsetzen

Einsetzen in Feldgleichung für  $a_\lambda$  ergibt Dynamik

(i) Fall 1 Mode

$$d_u^{(1)} = d_0 \left( 1 - 2 |a|^2 |g_{\lambda u}|^2 \frac{2\mu T_1}{(\bar{\omega}_u - J_2 \lambda)^2 + \mu^2} \right) = d_0 \left( 1 - 2 T_1 G_{\lambda u} |a_\lambda|^2 \right)$$

$\uparrow$  Lochbrennen (bekannt aus 5.5.1.)

(ii)  $\geq 2$  Moden

$$d_u^{(1)} = d_0 \left( 1 - \left[ 2 T_1 G_{\lambda_1 n} |a_{\lambda_1}|^2 + 2 T_1 G_{\lambda_2 n} |a_{\lambda_2}|^2 \right] \right) \dots \rightarrow \text{Lochbrennen}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \mathcal{R}_1 \\ \lambda_2 &\approx \mathcal{R}_2 \end{aligned}$$

$$\left. -z g_1^* g_2 M_{12}^* \underbrace{a_1^* a_2}_{\sim e^{i(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2)t}} + c.c. - z g_2^* g_1 M_{21}^* \underbrace{a_2^* a_1}_{\sim e^{i(\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1)t}} + c.c. \right] \rightarrow \text{Pulsationen der Inversion}$$

→ Durch Phasenkopplung beider Moden entstehen Inversionspulsationen mit der Differenzfrequenz

(iii) bei vielen Moden entstehen kurze Pulse im E-Feld  
(kohärente Überlagerung)