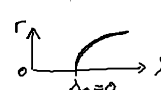
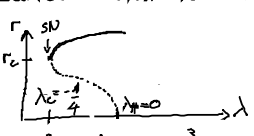


Zusammenfassung der Bifurkationen, die Oszillationen erzeugen:

	Periode	Amplitude
(B) Hopf-Bifurkation $\dot{r} = \lambda r - r^3$ (superkrit.) $\dot{\varphi} = 1 - r^2$ 	$O(1)$	$O(\sqrt{\lambda})$
(C1) Sattel-Knoten von Grenzzyklen  $\dot{r} = \lambda r + r^3 - r^5$ $\dot{\varphi} = 1 + r^2$	$O(1)$	$O(1)$
(D1) SNIPER Bif. $\dot{r} = r - r^3$ $\dot{\varphi} = b - r \cos \varphi$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)$ ↑ Abstand zum Bif. Punkt $\frac{1}{ b^2 - 1 }$ • unendliche periode	$O(1)$
(D2) Homocline Bif.	$O(\ln \mu)$	$O(1)$

### 1.4. Deterministisches Chaos

Deterministisches Verhalten (reproduzierbar mit exakt gleichen Startbedingungen), aber „ungeordnete“ Bewegung im Langzeitverhalten von Systemen mit  $n \geq 3$  (autonom). Seltsamer (chaotischer) Attraktor

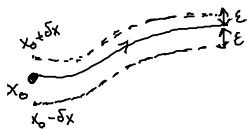
### 1.4.1. Kriterien zur Klassifikation

	quasi-period. Verhalten	deterministisches chaos	stochastisches Verhalten (Rauschen)
<u>dyn. Freiheitsgrade</u> Phasenraumdimensionen	wenige Freiheitsgrad. Attraktor: Torus Td mit $d=2,3,4...$	wenige Freiheitsgrade Attraktor: fraktale Dimensionen	viele mikroskop. Freiheitsgr. stat. Ensemble für $10^{23}$ kein Attraktor
<u>Autokorrelationsfunktion</u> $\langle x(t)x(t+\tau) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt$	period. in $\tau$	für $\tau \rightarrow \infty$ $\rightarrow 0$	$= 0$ für $\tau > \tau_c$
<u>Fourierspektrum</u> $S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x(t)x(t+\tau) \rangle e^{i\omega\tau} d\tau$ (Wiener-Kinchin)	$\omega_1, \omega_2$	breites Frequenzband	breites Frequenzband
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• sensible Abhängigkeit von Anfangsbedingungen</li> <li>• typische universelle Bifurkationsstrukturen</li> </ul>	

► Def.: Eine Bewegung heißt chaotisch, wenn sie empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt.

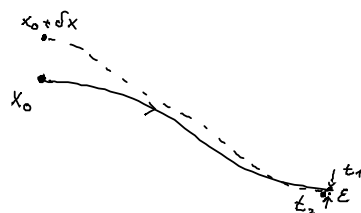
Quantitative Formulierung :

Stabilität gegenüber kleinen Variationen der AB



• bahnstabil

alle benachbarten Bahnen  
bleiben in einer Röhre um  $\phi(t, x_0)$

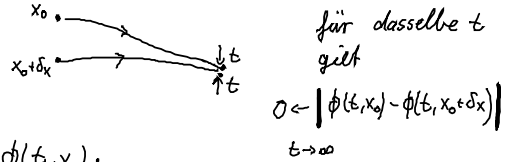


• asymptotisch Bahnstabil

Abstand benachbarter Bahnen  $\rightarrow 0$   
für  $t \rightarrow \infty$

• asymptotisch stabil

$$\dot{x} = F(x)$$



Linearisierung in der Nähe der Lösungskurve  $\phi(t, x_0)$ :

$$\dot{\delta x}_i = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial x_k}}_{A_{ik}(t)}(x(t), t) \delta x_k$$

$A_{ik}(t)$  : Eigenwerte  $\lambda_k(t)$ , Eigenvektoren  $f^k(t)$

formale Lösung

$$\delta x(t) = e^{\int_0^t A(t') dt'} \delta x(0)$$

Zeitentwicklung einer infinitesimalen Kugel um  $x_0$

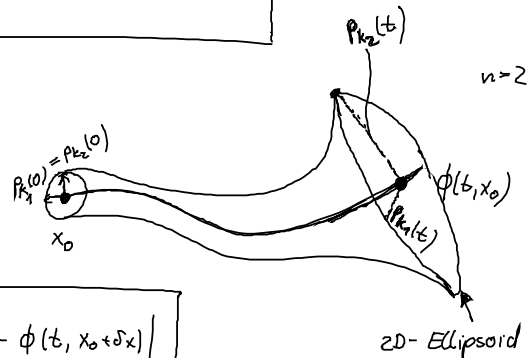
$\rightarrow n$ -dim. Ellipsoid mit Hauptachsen  $\rho_k(t) \approx \rho_k(0) e^{\bar{\lambda}_k t}$

► Def.: Stabilität ist bestimmt durch die Lyapunov-Exponenten

$$\bar{\lambda}_k := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\rho_k(t)}{\rho_k(0)}$$

$$k: k_1 \dots k_n$$

$$\lambda_k: \lambda_1 \dots \lambda_n$$



Bemerkung: Führender (größter) Lyapunov-Exp.

$$\lambda := \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{1}{t} \ln |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0 + \delta x)|$$

$$\Rightarrow |\phi(t, x_0) - \phi(t, x_0 + \delta x)| \sim e^{\lambda t}$$

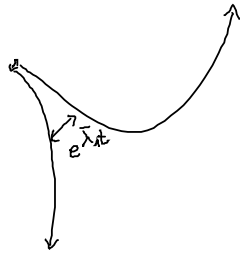
$\lambda < 0$  : kleine Abweichungen der AB werden exp. gedämpft

$\lambda > 0$  : exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Bahnen  
 nicht bahnstabil

$\hat{=}$  Def. für chaos

Bsp. chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$  :  $\bar{\lambda}_1 > 0$ ,  $\bar{\lambda}_2 = 0$ ,  $\bar{\lambda}_3 < 0$

instab. Bewegung auf dem Attraktor  $\rightarrow$  Goldstone Mode (invariante Mannigfaltigkeit)  $\rightarrow$  Annäherung an den Attraktor



1.4.2. Quantitative Formulierung der fraktalen Dimension des seltsamen Attraktors

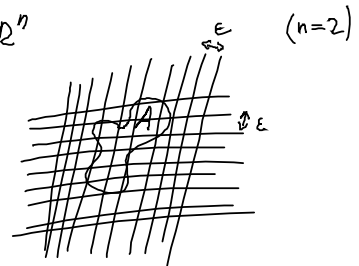
Vordlgem. Dimensionsbegriff:

Hausdorff-Dimension einer Punktmenge  $A$  im  $\mathbb{R}^n$

Sei  $N(\epsilon)$  die Mindestzahl von  $n$ -dim. Würfeln mit Seitenlänge  $\epsilon$ , um  $A$  zu überdecken.





Dann ist

$$d := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}$$



Gitter aus  $n$ -dim. Würfeln

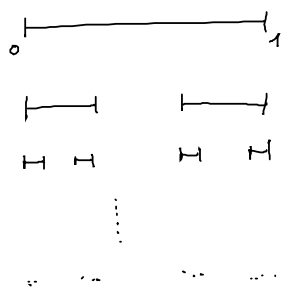
die fraktale Dimension (Hausdorff) d. h.  $N(\epsilon) \sim \frac{1}{\epsilon^d}$ .

Bsp. : Punkt	$N(\epsilon) = \text{const}$		$d=0$
Linie	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$		$d=1$
Fläche	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2}$		$d=2$
Volumen	$N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3}$		$d=3$

(halbe Länge  $\epsilon \rightarrow$  doppelt soviel Würfel)

• chaotischer Attraktor im  $\mathbb{R}^3$ , Volumen  $\rightarrow 0 \rightarrow d < 3$  aber  $d > 2$   
 ist z.B. im Lorenz-Modell  $d \approx 2.05 \dots$

• Beispiel für  $0 < d < 1$  ist die Cantormenge



$$\varepsilon = 1 \rightarrow N = 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \rightarrow N = 2$$

$$\varepsilon = \frac{1}{9} \rightarrow N = 4$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3^n} \rightarrow N = 2^n$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309$$

• Beispiel: Koch's Kurve (Schneeflocke)

Zwischen Linie  
und Fläche



$$\varepsilon = 1$$

$$N = 1$$



$$\varepsilon = \frac{1}{3}$$

$$N = 4$$



$$\varepsilon = \frac{1}{9}$$

$$N = 16$$

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$N = 4^n$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 4^n}{\ln 3^4} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.2618$$

Fractal (selbst ähnlich)

z.B. wie Meeresküste