

- Wdh + Galilei-Trafo: Raum & Zeit mischen sich
- + Michelson/Morley: Es gibt keine Äther
- + Einstein: Die Vakuum-LGS ist in allen IS konstant
- + Lorentz-Trafo
- + Ursprung von t' bewegt sich mit v in x $x'=0 \Leftrightarrow x=v \cdot t$
- + Wellenzf. invariant

\Rightarrow Lorentz-Trafo für $v = v \cdot e_x$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

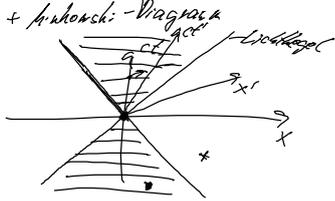
$$\beta = \frac{v}{c} \quad -1 \leq \beta \leq +1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

"longitudinale" Komponente mischt mit d. Zeit

- + rel. Längenkontraktion $L_y' = \frac{L_y}{\gamma}$
- + " Zeitdilatation $\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t$

für $v \ll c$ fällt LT auf GT zurück



§ 7.4 Vierervektoren

Notation: Einsteinsche Σ -Konvention: Ober Indizes sind doppelt vorhanden (oben und unten) und ant. kontrav.

Kontravariante $x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Kovariante $x_{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

Konvention griech. Buchst. = komp. eines 4er Vektors $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} x^0 &= ct = x_0 \\ x^1 &= x = -x_1 \\ x^2 &= y = -x_2 \\ x^3 &= z = -x_3 \end{aligned}$$

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\nu} \cdot x^{\nu}$$

\uparrow
 μ -komp. eines kov. 4er Vektors

ν -komp. eines kontravarianten "metrischen Tensor" auch $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^{\nu} = \eta^{\nu\mu} x_{\mu}$$

beachte Σ -Konvention

\uparrow versch. Konventionen

LT: $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

$$\left(\Lambda^{\mu}_{\nu} \right) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \\ \text{③} \\ \text{④} \end{matrix}$$

finde Skalarprodukt durch Analogie zu Drehungen

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\mu y^\mu = \vec{x}^T \cdot \vec{y}^T$$

$$x_\mu x^\mu = (ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

$x_\mu x^\mu < 0$ ist möglich

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{LT für kontrav. 4-er V.}$$

$$x'_\mu = \left(\eta_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha_\nu \eta^{\nu\kappa} \right) x_\kappa$$

$$= \Lambda_\mu^\alpha x_\alpha \quad \text{effektiv: } (\beta \rightarrow -\beta)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \gamma & -\beta\gamma & \\ & -\beta\gamma & \gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \gamma & -\beta\gamma & \\ & -\beta\gamma & \gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \gamma & -\beta\gamma & \\ & -\beta\gamma & \gamma & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + \beta\gamma & & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & \gamma & \\ & & & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y}' = \eta_{\mu\nu} x'^\mu y^\nu$$

$$= \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\kappa x^\alpha y^\kappa$$

$$= \Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\kappa x^\alpha y^\kappa = \eta_{\alpha\kappa} x^\alpha y^\kappa = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\boxed{\Lambda \eta \Lambda = \eta}$$

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Skalar-Prod. von 4er Vektoren sind invariant unter LT

$$x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

• 4er Geschwindigkeit

$$\text{Eigenzeit } d\tau = \sqrt{\frac{dx_\mu dx^\mu}{c^2}} = \sqrt{\frac{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)}$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v \cdot v}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

↑
in ruhendem System

↑
Laborsystem

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot c \\ \gamma \cdot v_x \\ \gamma \cdot v_y \\ \gamma \cdot v_z \end{pmatrix}$$

$$\text{LT: } U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \cdot U^\nu$$

$$\beta^2 = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}$$

$$v_\mu v^\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = c^2 \gamma^2 [1 - \beta^2] = c^2$$

Lorentz-Skalar "LGS ist überall konstant" Interpretation: $E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2 = \text{eff. } c^2 \quad E_0 = m_0 \cdot c^2$

• 4er Impuls

$$P^\mu = m_0 \cdot U^\mu = \begin{pmatrix} \gamma \cdot m_0 \cdot c \\ \gamma m_0 \cdot v_x \\ \gamma m_0 \cdot v_y \\ \gamma m_0 \cdot v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

↑
Ruhelage

$$P_\mu P^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \gamma^2 m_0^2 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{E_0^2}{c^2}$$

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \gamma^2 m_0^2 (v \cdot v)}$$

rel. Energie-Impuls-Beziehung

γ divergiert für $v \rightarrow c$

$$P_i = \text{eff. } v_i$$

$$T = E - \epsilon_0 c^2 = \epsilon_0 c^2 \left[\sqrt{1 - \beta^2} \gamma^2 - 1 \right] \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \dot{\mathbf{r}}^2 + \mathcal{O}(\beta^4)$$

5.7.5. Kov. Notation der ED

Idee: Drücke alles durch vier Vektoren aus

kovariante Ableitung

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ + \partial_x \\ + \partial_y \\ + \partial_z \end{pmatrix} \quad \text{kontrav. } \partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \partial_t \\ - \partial_x \\ - \partial_y \\ - \partial_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) = -\square$$

vier Stromdichte $j^\mu = \begin{pmatrix} c \cdot \rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$ $\partial_\mu j^\mu = c^2 \rho^2 - \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$ ist invariant

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \partial_t (c \cdot \rho) + \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

"kont.-gl. gilt in jedem IS"

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0}$$

• vier Potentiale

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

Lorenz-Eindung

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{für } \partial_\mu A^\mu = 0 \quad \begin{cases} \nabla \Phi = -\mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \dot{\rho} \end{cases}$$

$$A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$$

$$\boxed{\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu}$$

• Feldstärke-Tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{antisymmetrisch}$$

$$\text{z.B.: } F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z$$

$$F^{03} = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = \frac{1}{c} \partial_t A_z + \partial_z \Phi = -E_z$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ +E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ +E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \partial^\alpha \Lambda^\nu_\beta A^\beta - \Lambda^\nu_\beta \partial^\beta \Lambda^\mu_\alpha A^\alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \\ \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{E}} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \text{4 Gl.} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{4 Gl. unabhängig} \end{array}$$

Vorteile: + symmetrisch & leichter zu verwenden
 + Lorentz-Invarianz
 + prakt. Nutzen: in manchen IS ist die Lösung einfach

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu\nu} + \underbrace{(\partial^\mu \partial^\nu \Lambda - \partial^\nu \partial^\mu \Lambda)}_0$$

Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} w & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ S_y/c & -T_{xy} & -T_{yy} & -T_{yz} \\ S_z/c & -T_{xz} & -T_{yz} & -T_{zz} \end{pmatrix}$$

Druck-Vektor Maxwell'scher Spannungstensor

4er Krümmung

$$f^\nu = \partial_\mu T^{\mu\nu}$$