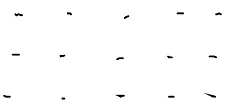
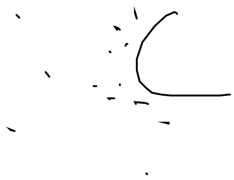
# VII. Finite Element Methoden

Zur Lösung von partielle differential Gleichungen (PDE) haben wir bisher Finite Differenz Methoden (speziell FDTD) kennengelernt.

Beide Methoden funktionieren auf ein Gitter ein gleichmäßiges rechteckiges Gitter



Nehmen wir an wir hätten eine Spitze aus Metall mit Feldstärken, jetzt wäre es toll wenn wir irreguläre Gitter wählen könnten $\Rightarrow$ viele

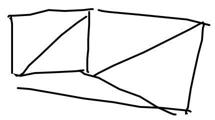


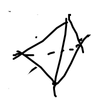
Punkte bei der Spitze, weniger im Bereich geringer Feldstärken.

$\Rightarrow$ Dazu Finite Element Methode

Idee: Wir zerlegen den Raum in kleine Volumen (Flächen)

z.B. Dreiecke in 2D oder Tetraeder, Hexaeder





also Finite Elemente

(Wir folgen C. Schwarzbach "3D-Finite-Elemente zur Diskretisierung der Maxwellgl.")

## Beispiel

(i) Sei $\Omega_j$ das Gebiet eines finiten Elements (z.B. Dreieck, Tetraeder)

(#)
$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r \mu_0} \nabla \times \underline{E}\right) - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E} = i\omega \underline{J}$$
$\leftarrow$ z.B. Polarisation

sowie
$$i\omega \, \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E}) = \nabla \cdot \underline{J}_r$$

gelten auf $\Omega_j$ mit stetigen $\varepsilon$'s, $\mu$'s und $\nu$'s.

(ii) Zwischen $\Omega_i$ und $\Omega_j$ $(i \neq j)$ sind die tangentialen Komponenten von $\underline{E}$ und $\underline{H}$ stetig, und die Normalkomponente von $\underline{J}$, $\underline{D}$ und $\underline{B}$ (Wie aus ED bekannt!)

(iii) Der Rand des Rechengebiets $\Omega = \cup_j \Omega_j$ kann dann je nach Dirichlet oder von Neumann Randbed. ..

Dirichlet
$$\underline{n} \times \underline{E} = \underline{n} \times \underline{E}_0 \quad \text{auf Fläche } \Gamma_1$$

von Neumann:
$$\underline{n} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \underline{E}\right) = i\omega \underline{J}_1 \quad \text{auf Fläche } \Gamma_2$$

$$i\omega\, \underline{n} \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E}) = \underline{n} \cdot \underline{J}_v \quad \text{auf Fläche } \Gamma_2$$

## schwache Formulierung

Was ist ein Funktional? Ein Funktional bildet einen Vektor auf eine Zahl ab! In dem Sinn ist $\langle \phi |$ ein Funktional, denn für $| \psi \rangle$ bel. ist $\langle \phi | \psi \rangle$ eine Zahl!

Allgemein für unsere Felder
$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_\Omega \underline{\phi}^*(\underline{r}) \cdot \underline{\psi}(\underline{r})\, d\underline{r}$$
kann man das benutzen um Funktional zu definieren.

Eine schwache Formulierung bedeutet, dass etwas in dem Sinn eines Funktionals gleich ist.

(Insbesondere sind Grenzflächen damit egal)

Sei jetzt $\underline{\Phi}$ eine Testfunktion.

$$\int_\Omega \underline{\Phi}^*(\underline{r})\cdot\nabla\times\left(\frac{1}{\mu\mu_r}\nabla\times\underline{E}\right)d^3r \underset{\substack{\text{partielle}\\\text{Integration}}}{=} \int_\Omega (\nabla\times\phi^*(\underline{r}))\cdot\left(\frac{1}{\mu\mu_r}\nabla\times\underline{E}\right)d^3r$$

$$+\int_{\partial\Omega}\phi^*(\underline{r})\left(\underline{n}\times\left(\frac{1}{\mu\mu_0}\nabla\times\underline{E}\right)\right)d^3r$$

Zusammen mit den neuen Randbed. und der Forderung $\underline{n}\times\phi=0$ auf der Dirichlet Fläche (Vgl. #)

Bestimme $\underline{E}$, so dass

$$\int_\Omega (\nabla\times\phi(\underline{r}))\left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\nabla\times\underline{E}\right)d^3r - \omega^2\int_\Omega \phi^*\cdot(\varepsilon\,\underline{E})\,d^3r$$

$$= i\omega\int_\Omega \phi^*\cdot J_r\,d^3r - i\omega\int_{\Gamma_2}\phi\cdot J_f\,d^3r$$

für alle Testfunktionen $\phi$ gilt!

Enthält die PDE, die Stetigkeit der Tangentialkomponente und Neumann Randbed. => Nur näherungsweise Erfüllung!

Die Dirichlet, Stetigkeit von E wird über die Konstruktion der Funktion erfüllt:

rot einmal anwendbar.

$U = \{\underline{E}\in H^{rot}(\Omega): \underline{n}\times\underline{E}=\underline{n}\times\underline{E}_0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ (Ansatzfunktionen)

$V = \{\underline{\phi}\in H^{rot}(\Omega): \underline{n}\times\underline{\phi}=0 \text{ auf } \Gamma_1\}$ (Testfunktionen)

$H^{rot} = \{\Psi\in L^2(\Omega)^3: \operatorname{rot}\Psi\in L^2(\Omega)^3\}$

Beispiel für schwach Formulierung beendet.

# Finite Element (Vorgehen)

1. Schritt: Zerlegen $\Omega$ in geometrische Elemente (Dreieck, Hexagon, Tetraeder, etc.)

2. Schritt: Wir approximieren den unendlich dimensionalen Funktionenraum durch endliche Funktionen (Endlich viele Basisfunktionen)

Damit ist $V_H$, $V_H$ endlich dimensional $\Rightarrow$ Variationsproblem endlich Dimension.

3. Schritt: Sei $\{\underline{\Phi}\}$ ein vollständiger Satz von Basisfunktionen

Dann ist $\underline{E}(\underline{r}) = \sum_i c_i \underline{\Phi}_i(\underline{r})$ (*)

Sortieren die Basisfunktionen so, dass $m \leq n$ Funktionen $\{\phi_i\}^n$ Basis von $V$ sind

Die restlichen Koeffizienten $c_i$ (mit $i \geq n$) werden durch Dirichlet Randbed. festgelegt.

4. Schritt: Transformation des Variationsproblems auf die endliche Basis. (Ansatz (*)) mit auf einsetzen:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{j,i}\, c_i = f_j \qquad j = 1 \ldots m$$

wobei
$$a_{ji} := \int_\Omega \nabla\times\phi_j \cdot \left(\frac{1}{\mu_0\mu_r}\nabla\times\phi_i\right) d^3r - \omega^2 \int_\Omega \phi_j \left(\epsilon_r\epsilon_0\,\phi_i\right) d^3r$$

$$f_i = i\omega \int_\Omega \underline{\Phi}_j^{*}\, J_r\, d^3r - i\omega \int_{\Gamma_2} \phi_j^{*} \cdot J_A\, d^2r - \sum_{i=m+1}^{n} a_{ji}\, c_i$$

Bekannt aus den Randbed.

$\Rightarrow$ Abschließend auf nicht hermitesches komplexes lin. Gleichungssystem.

Lösen wir das Gleichungssystem erhalten wir das $\underline{E}$-Feld für jeden Punkt im Gebiet approximiert durch die Basisfunkt.!

Üblicherweise werden die Basisfunktion mit kompaktem Träger auf $\Omega_i$ definiert, dies führt zu einer dünnbesetzten Matrix.

Bemerkung

1) Je nach Problem gibt es verschiedene Basisfunktionen. In der Regel sind es Polynome vom Grad k, die die notwendigen Randbedingungen des Ansatzes erfüllen (Abhängig von DGL), z.B. tangential Komponente stetig oder verschwindend auf Grenzfläche. Standardansatz Finite Element oder Ansatz nach Nédélec.

2) Neben Problemen im Frequenzraum gibt es auch FE für die Zeitdynamik in Kontinuumsphysik, Akkustik etc.

3.) Fertige FEM Solver, JCMWave (Elektrodynamik)
Comsol (Alles mögliche, Elektrodynamik, Elastomechanik, Wärmeleitung, Industriestandard) und viele mehr!

4.) Meist muss noch ein an das Problem angepasstes Gitter konstruiert werden:
Typisches Vorgehen

Mesh konstruieren
↓
Problem lösen
↓
lokalen Fehler berechnen

ggf. Mesh anpassen.

5.) Vorteil gegenüber Finite Differenzen
a) Beliebige Gitter
b) Einfache Implementierung von Grenzflächen (Stetigkeit)

## VIII.15 Matrizen Tensor: Rechenoperation, Normen, Diagramme

**Was ist ein Tensor?** (Abbildung aus mehreren Dimensionen auf eine Zahl)

**Zahl** $c$ (Hat kein Index $\Rightarrow$ Tensor 0ter Stufe)

**Vektor** $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ (Element $v_n$ haben ein Index $\Rightarrow$ Tensor 1ter Stufe)

**Matrix** $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$ (Element $m_{nn}$ haben zwei Indices Tensor 2ter Stufe)

**Tensor:** $T_{n_1 n_2 n_3}$ 3 Stufe

$\vdots$

$T_{n_1 \cdots n_k}$ $k$ Stufe

**Wo treten diese auf? Was ist das Problem?**

z.B. Wellenfunktion:

| | | Interpretation | Skalierung |
|---|---|---|---|
| 1 Teilchen | $\psi(\underline{x}_1)$ | Tensor erster Stufe | $N$ |
| 2. Teilchen | $\psi(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ (z.B. Exziton) | Tensor zweiter Stufe | $N^2$ |
| 3. Teilchen | $\psi(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)$ (z.B. Trion) | Tensor dritter Stufe | $N^3$ |
| 4. Teilchen | $\psi(\underline{x}_1, x_2, x_3, x_4)$ (z.B. Biexzitonen oder Korrelationen | Tensor vierter Stufe | $N^4$ |

$\langle a^+_{vk_1} a_{ck_2} \rangle$ Exzit. auf BZ Tensor zweiter Stufe $N^2$

$\langle a^+_{vk_1} a^+_{vk_2} a_{ck_3} a_{ck_4} \rangle$ Biexzit. auf BZ Tensor vierter Stufe $N^4$

oder Spinketten

$n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{k-1} \quad n_k \Rightarrow \Psi_{n_1,\dots,n_k}$ Tensor k-ter Stufe $2^k$

eCommerce

z. B. Kunde beim Online Shopping

T( Kunde, Kategorie, Produkt 2, Produkt 3 ...)

Auch hochdimensionaler Tensor dünn besetzt.

Übersetzungsmatrix

$U(\underset{\text{Wort in Deutsch}}{\_\_}, \underset{\text{Wort in Englisch}}{\_\_}, \underset{\text{Wort Chinesisch}}{\_\_})$ auch das ist ein hochdimensionaler Tensor.

Neuronale Netze werden auch als Tensor dargestellt.

$\Rightarrow$ Megaproblem der Fluch der Dimensionalität

alles skaliert $x^{NE}$ Rank des Tensors

Hochdimensionale Tensoren können wir nicht speichern

oder doch?