

Wkt. =

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{\pm i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Lippmann-Schwinger-Gl. (Scatteringpotential  
am Ursprung lokalisiert)

Streuamplitude ( $|\underline{r}| \rightarrow \infty$ )

$$f^{(\pm)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{\mp i\underline{k}_{\text{ein}} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')$$

asymptotisch exakt!

Born'sche Näherung: Ersetze  $\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}$  im Integral durch  $e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}'}$

$$\Rightarrow f_{\text{Born}}^{(+)}(k_{\text{ein}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\underline{q}), \quad \underline{q} = \underline{k}_{\text{ein}} - \underline{k}$$

Fouriertransf. des Streupotentials

Abschätzung der Gültigkeit der Born'schen Näherung:

beachte: Born'sche Näherung entspricht der 1. Iteration der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}) = e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(\pm)}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

(Abbruch nach dem ersten Term)

$$\left( e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}'' \frac{e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}'')} V(\underline{r}'')}{|\underline{r}-\underline{r}''|} + \dots \right)$$

Damit das Sinus macht, sollte gelten

$$\textcircled{*} \left| \left( -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int dr' \frac{e^{i k(r-r')} V(r') e^{i k r'}}{|r-r'|} \right) \right| \ll \left| \frac{e^{i k r}}{r} \right| = 1$$

d.h. zweiter Term  $\ll$  erster Term

Auswertung von  $\textcircled{*}$  für kugelsymmetrisches Potential  $V(r) = V(r')$

und setzen  $r = 0$

(die Bedingung  $\textcircled{*}$  ist dann erst wieder für  $r > 0$  erfüllt!)

$$\Rightarrow \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int dr' \frac{1}{r'} e^{i k r'} e^{i k r' \cos \alpha} V(r') \right| \ll 1$$

$\underbrace{\int_0^\infty dr' r'^2}_{2\pi} \underbrace{\int_{-1}^{+1} d(\cos \alpha)}_{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty dr' V(r') e^{i k r'} (e^{i k r'} - e^{-i k r'}) \right| \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \int_0^\infty dr' V(r') (e^{2i k r'} - 1) \right| \ll \frac{\hbar^2 k}{2m} \quad \textcircled{**}$$

Betrachte 2 Fälle

a) Hohe Energien

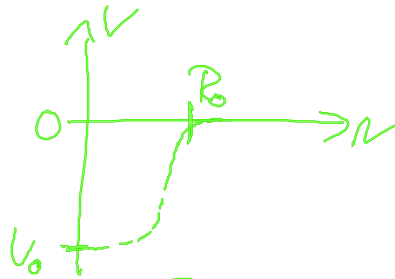
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \text{ groß}$$

$\Rightarrow e^{z i k r}$  (um Null) sehr rasch oszillierende Funktionen

$$\int_0^{\infty} dr' V(r') e^{z i k r'} \approx 0$$

Aus **(\*\*)** folgt dann -  $\int_0^{\infty} dr V(r) \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}$   
Raumintegral über  $V(r)$

z.B.  $V(r)$  Topfpotential



$$\Rightarrow \int_0^{\infty} dr V(r) \approx V_0 R_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 R_0 \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}$$

erfüllt, falls Stumpfpotential (d.h.  $V_0$  klein) und nur wenig ausgedehnt ist ( $R_0$  klein)

b) Kleine Energien, ( $U$  klein)

entwickle Exponentialfunktion  $e^{-z|k|} \approx 1 - z|k| + \dots$

aus  $(*)$   $\left| zU \int_0^\infty dr' r' V(r') \right| \ll \frac{\hbar^2 k}{2m}$

Störpotential muß sehr viel kleiner sein als die durch die schon vorhandene Teilchenenergie

→ sehr einschränkende Bedingung

(ausführliche Diskussion siehe z.B. Nolte S. 102)

Fazit: Bornsche Näherung ist tendenziell besser im Fall hoher Teilchenenergie und schwachen Störpotentials!

### III.4. Formale Störtheorie und Green'sche Funktion

Wir führen zunächst eine Verallgemeinerung der

Green'schen Funktion zum freien Hamiltonian ein,  $\hat{G}_0(E) = \frac{1}{E - \hat{H}_0}$

so dass anstatt  $\hat{H}_0$  der volle Hamiltonian  $\hat{H}$  vorkommt.

mit  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$  räuml. lokalisiertes Ein-Teilchen-Störpotential

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z - \hat{H}}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (*)$$

hier werde  $E$  gerade durch eine komplexe Zahl ersetzt, um Fälle mit  $z = E \pm i\epsilon$  behandeln zu können

Umkehr von  $\circledast$

$$\hat{G}(z) = (z - \hat{H})^{-1} = (z - \hat{H}_0 - \hat{V})^{-1} = \left( (\hat{G}_0(z))^{-1} - \hat{V} \right)^{-1}$$

$$= \left( (\hat{G}_0(z))^{-1} (1 - \hat{G}_0(z) \hat{V}) \right)^{-1}$$

benutze  
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ A & B \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{B-A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & A \end{pmatrix}$

$$\hat{G}(z) = (1 - \hat{G}_0(z) \hat{V})^{-1} \hat{G}_0(z)$$

benutze Formel für geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0 q^k = \frac{a_0}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

hier  $a_0 \Rightarrow \hat{G}_0(z)$ ,  $q \Rightarrow \hat{G}_0(z) \hat{V}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k a_0 = \frac{a_0}{1-q}$$

$$\rightarrow \hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z)}_{k=1} + \underbrace{\hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z)}_{k=2} + \dots$$

$\circledast$

$$= \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \left( \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) + \dots \right)$$

das ist wieder  $\hat{G}(z)$ !!

$$\Rightarrow \boxed{\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z)}$$

exist!!

Dyson-Gleichung (für Einheitsproblem)

liefert Zusammenhang zw.  
 $\hat{G}(z)$  und  $\hat{G}_0(z)$ , ist implizit

Gl. ist aber auch relevant in  
der Vielteilchentheorie!!

Äquivalent kann man wie folgt aufsummieren.

$$\textcircled{*}: \hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) + \dots$$

$$= \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \left[ \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} + \dots \right] \hat{G}_0(z)$$

definiere

$$\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} + \dots$$

"T-Matrix"

$$= \hat{V} + (\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0(z) \hat{V} + \dots) \hat{G}_0(z) \hat{V}$$

$$\boxed{\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{T}(z) \hat{G}_0(z) \hat{V}}$$

exist, implizit,  
liefert Zusammenhang  
zw. T-Matrix und  $\hat{V}$

Dann folgt (durch Kombination)

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{T}(z) \hat{G}_0(z)$$

Durch Kenntnis der  $T$ -Matrix kann man also die volle Green'sche Funktion konstruieren!

Umformung der Dyson-Gleichung

$$\hat{G}(z) = \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z)$$

$$\Rightarrow \langle \underline{N} | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle = \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}' \rangle$$

$$+ \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) \hat{V} \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 Einschieben von Antiteilchenzuständen

$$\Rightarrow \langle \underline{N} | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

$$= \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}' \rangle + \int d\underline{N}_1 \int d\underline{N}_2 \langle \underline{N} | \hat{G}_0(z) | \underline{N}_1 \rangle \langle \underline{N}_1 | \hat{V} | \underline{N}_2 \rangle \cdot \langle \underline{N}_2 | \hat{G}(z) | \underline{N}' \rangle$$

benutze, dass  $\hat{V}$  Skalarpotential ist und nur auf eine Koordinate wirkt!

$$\begin{aligned} \langle N_1 | \hat{V} | N_2 \rangle &= \hat{V}(N_2) \langle N_1 | N_2 \rangle \\ &= \hat{V}(N_2) \delta(N_1 - N_2) \\ &= \hat{V}(N_1) \delta(N_1 - N_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle N | \hat{G}(z) | N' \rangle &= \hat{G}(N, N'; z) \\ &= \langle N | \hat{G}_0(z) | N' \rangle \\ &\quad + \int dN_1 \langle N | \hat{G}_0(z) | N_1 \rangle \hat{V}(N_1) \langle N_1 | \hat{G}(z) | N' \rangle \end{aligned}$$

Das ist die Dyson-Gl. in Ortsdarstellung, also als Integralgleichung !!

beachte:  $\hat{G}$  ist implizit  
Sie besitzt starke Ähnlichkeit mit der  
Lippmann-Schwinger-Gl.!

dort hatten wir:

$$|\psi_{\pm}^{(\pm)}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(z) \hat{V} |\psi_{\pm}^{(\pm)}\rangle$$

einfallende,  
ebene Welle



Umschreiben der Lippmann-Schwinger-Gl., so dass die volle Green'sche Funktion darin vorkommt:

dazu Iteration

$$\begin{aligned}
 |\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle &= |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \left( |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \dots \right) \\
 &= |\underline{k}\rangle + \left[ \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} + \dots \right] |\underline{k}\rangle \\
 &= |\underline{k}\rangle + \left[ \hat{G}_0^{(\pm)}(E) + \hat{G}_0^{(\pm)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(\pm)}(E) + \dots \right] \hat{V} |\underline{k}\rangle
 \end{aligned}$$

das ist wieder die volle Green'sche Funktion!

Wir erhalten also mit Hilfe der (iterierten) Dyson-Gl.:

$$|\psi_{\underline{k}}^{(\pm)}\rangle = |\underline{k}\rangle + \hat{G}^{(\pm)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle$$

Im Gegensatz zur bisherigen Formulierung der Lippmann-Schwinger-Gl. tauchen auf der rechten Seite nun einfache ebene Wellen  $|\underline{k}\rangle$  auf ... Keine implizite Gl. mehr!

Aber: Statt  $\hat{G}_0$  taucht jetzt die volle Green'sche Funktion auf

## Streumplitude

Wir hatten vor Born'scher Näherung

$$f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\underline{r}' e^{-i\mathbf{k}_{\text{er}} \cdot \underline{r}'} V(\underline{r}') \psi_{\underline{k}}^{(+)}(\underline{r}') \\ = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_{\text{er}} | \hat{V} | \psi_{\underline{k}}^{(+)} \rangle$$

Setze wieder

$$|\psi_{\underline{k}}^{(+)}\rangle = |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} \hat{G}_0^{(+)}(E) \hat{V} |\underline{k}\rangle + \dots$$

$$\Rightarrow f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_{\text{er}} | \hat{V} (|\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} |\underline{k}\rangle + \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} |\underline{k}\rangle + \dots) \\ = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_{\text{er}} | \underbrace{\hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} \hat{G}_0^{(+)} \hat{V} + \dots}_{\text{das ist gerade die T-Matrix!}} | \underline{k} \rangle$$

$$\Rightarrow f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_{\text{er}} | \hat{T}^{(+)}(E) | \underline{k} \rangle \quad \text{Bald (asymptotisch) } \rightarrow 0$$

Vergleiche mit der Born'schen Näherung:

$$f^{(+)}(k_{\text{er}}, \underline{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \mathbf{k}_{\text{er}} | \hat{V} | \underline{k} \rangle$$

Im exakten Resultat kommt also die volle  $T$ -Matrix  
vor, in der Born'sche Näherung dagegen nur das  
"nackte Potential"  $V$