Wh: Schrödingerbild:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Schrödingerbild

Heisenbergbild:

Operatoren zeitabhängig!

Operator im Schrödingerbild

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^+(t,0)\,\hat{A}_S\,\hat{U}(t,0)$$

$$\hat{U}(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$$

Erwartungswert

$$\langle\psi(t)|\hat{A}_S|\psi(t)\rangle \quad , |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi(0)\rangle$$

$$= \langle\psi(0)|\hat{U}^+(t,0)\,\hat{A}_S\,\hat{U}(t,0)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|A_H(t)|\psi(0)\rangle$$

also: Zustände zeitunabhängig

Bewegungsgl. für Heisenbergoperator

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,\hat{A}_S\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\right)$$

$\hat{A}_S$ zeitunabhängig

$$= \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}_H]$$

Heisenberg'sche Bewegungsgl.

Dirac-Bild (Wechselwirkungsbild)

sei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ← Störung

definiere $\hat{A}_D(t) = \hat{U}_0^+(t,0)\, \hat{A}_S\, \hat{U}_0(t,0)$

$\hat{U}_0(t,0) \to e^{-i/\hbar\, \hat{H}_0 t}$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{A}_D}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0, \hat{A}_D\right]$$

Zustände im Dirac Bild

$$\langle \psi(t)|\, \hat{A}_S\, |\psi(t)\rangle \overset{!}{=} \langle \psi_D(t)|\, \hat{A}_D\, |\psi_D(t)\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0^+(t,0)\,|\psi(t)\rangle$$

zugehörige dynamische Gleichung: $i\hbar \frac{d}{dt}|\psi_D(t)\rangle = \hat{H}_1\,|\psi_D(t)\rangle$

I. Relativistische Quantenmechanik

Bisher kennengelernt:

nichtrelativist. QM, Schrödingergleichung, die man mit Hilfe von Korrespondenzregeln aus der klass. Mechanik herleiten kann

Konkret freies Teilchen:

$$E = E^{kin} = \frac{p^2}{2m}$$ klass., nicht-relativistisch

Korrespondenzregeln: $$E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$
$$p \to \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} \, |\psi(t)\rangle$$
mit $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$$

analog Teilchen im Potential $V(\underline{r})$

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\underline{r}) \Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\underline{r})$$

Zusammenhang mit Dispersionsrelation

benutze: $E = \hbar\omega$, $p = \hbar \underline{k}$ (de-Broglie-Relation)

Für freies Teilchen folgt

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$ Dispersionsrelation

zugehörige Wellenfunktion (Wellenpaket)

$$\psi(\underline{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d \underline{k} \; \tilde{\psi}(\underline{k}) \, e^{-i\omega(k)t + i\underline{k}\underline{r}}$$

d Raumdimension

check: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int d^d k \; \tilde{\psi}(k) \hbar\omega(k) e^{\cdots}$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = \;'' \int d^d k \; \tilde{\psi}(k) \overbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} e^{\cdots}$

I 1. Klein-Gordon-Gleichung

Ausgangspunkt (freies Teilchen)

$$E_{kin}^{rel} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (*)$$

Hintergrund zu (*)

Vierer-Impuls

zeitl. Komponente

räumliche Komponenten

$p^\mu \qquad \mu = 0, \underbrace{1, 2, 3}$

Einstein'sche Summation

$p^\mu = m_0 u^\mu$ ← Vierergeschwindigkeit $\quad \Rightarrow p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$

Komponenten:

zeitl. $p^0 = m_0 \gamma c \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$= m(v) c$

$m(v) = m_0 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

räuml.

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad i=1,2,3$$

$$= m(v)\, v^i = m_0 \gamma v^i$$

$$\underline{p}_{rel} = \gamma\, m_0 \underline{v}$$ 3-komponentiger Vektor „relativistische Impuls"

$v/c \to 0$ (nicht-relativist. Grenzfall)

$$\gamma \to 1$$

$$\Rightarrow \underline{p} = m_0 \underline{v}$$

Physikalische Bedeutung der Zeitkomponente des Viererimpuls.

$$p^0 = \frac{1}{c} E_{kin}^{rel}$$

hier ohne Herleitung, → relativist. Mechanik Minkowski-Kraft!

$$\Rightarrow p^\mu = \left(\frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, m_0 \gamma \underline{v}\right)$$

bilde

$$p_\mu = \left(\frac{1}{c} E_{kin}^{rel}, -m_0\gamma\underline{v}\right)$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{1}{c^2}\left(E_{kin}^{rel}\right)^2 - m_0^2 \gamma^2 \underline{v}^2$$

$$= \frac{1}{c^2}\left(E_{kin}^{rel}\right)^2 - \underline{p}_{rel}^2$$

$$\stackrel{!}{=} m_0^2 c^2$$

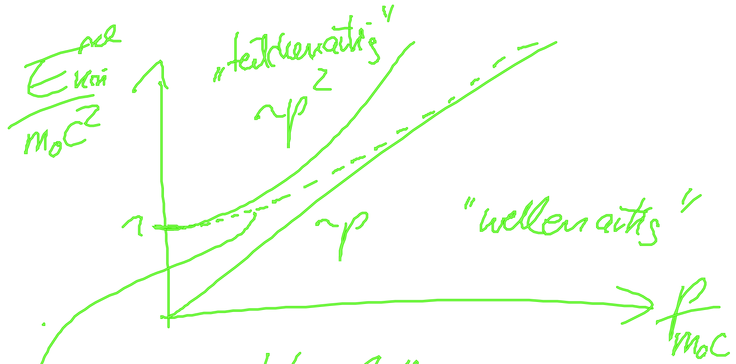
denn
$$p^\mu p_\mu = m_0^2 u^\mu u_\mu = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow E_{kin}^{rel} = \sqrt{c^2 p_{rel}^2 + m_0^2 c^4}$$

betrachte Grenzfälle dieser Relation

$p \ll m_0 c$ "Ruheimpuls" , $E_{kin}^{rel} \approx \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{p^2}{2m_0}$

$p \gg m_0 c$ $\quad E_{kin}^{rel} \approx cp$ "ultrarelativist."



$\omega = ck$
klass. Elektrodynamik
$E = \hbar\omega$
$\Rightarrow E = cp$

volle Relation: Interpolation zw. teilchenartigen und wellenartigen Verhalten

Ende des Exkurses zur relativist. Energie-Impuls Relation

Frage: Wie konstruieren wir daraus eine quantenmechanische Bewegungsgleichung für Zustände?

(*) $\quad E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$ $\quad$ relativist.

Korrespondenzregeln ersetze $E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \sqrt{m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta}\, \psi$$

nicht akzeptabel, da der Differentialoperator Δ unter der Wurzel steht

Ausweg:
quadriere (*) zunächst

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

jetzt wieder, $E \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi = \left(m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta\right) \psi$$

$$\Leftrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(m_0^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \Delta\right) \psi \quad | : (-\hbar^2 c^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi(\underline{r}, t) = 0$$

benutze Definition des d'Alembert-Operators

$$\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$\boxed{\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\underline{r},t) = 0}$$

Klein-Gordon-Gleichung

Bemerkungen

Die Größe $\frac{\hbar}{m_0 c} = \lambda_c$ heißt Compton-Wellenlänge

(spielt eine Rolle bei der relativist. Streuung von quantenmechan. Teilchen)

Weitere Diskussion der KG-Gleichung (Klein-Gordon)

a) Die KG-Gleichung ist partielle Diff.gl. zweiter Ordnung in der Zeit (und im Raum)

$\Rightarrow$ Zur Lösung benötigt man nicht nur $\psi(t=0)$, sondern auch $\dot{\psi}(t=0)$!!

Die (nicht-relativist.) Schrödingergleichung ist dagegen erster Ordnung in der Zeit!

b) Die KG-Gleichung ist "Lorentzinvariant"
d.h. sie ändert sich nicht bei einem Wechsel des Inertialsystems

<u>Begründung:</u> $\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi(\underline{r},t) = 0$

d'Alembert-Operator

$$\Box = -\partial^\mu \partial_\mu = -\partial_\mu \partial^\mu \quad \text{mit} \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right), \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

$\Box$ ~~ist~~ ~~...~~ läßt sich schreiben als (Vierer-) Skalarprodukt und ist damit Lorentzinvariant

Der Faktor $\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$ ist ebenfalls Skalar

$\Rightarrow$ KG-Gleichung ist Lorentzinvariant, falls auch $\psi(\underline{r},t)$ skalar

beachte auch:

Für $m_0 = 0$ reduziert sich die KG-Gl. auf bekannte Wellengleichung aus der Elektrodynamik

d) <u>Unklare Berücksichtigung des Spins ??</u>

Erinnerung an nicht-relativist. QM

Spin $\hat{=}$ Drehimpuls mit $l = s = \frac{1}{2}$ (Elektron)

Drehimpuls wird "eingebaut" über

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \hat{\mu} \cdot \underline{B}$$

externes magnet. Feld

magnet. Moment zum Drehimpuls

$$\hat{\underline{\mu}} \sim \hat{\underline{l}}$$

Problem: Man kann Term der Form $\hat{\mu} \cdot \underline{B}$ nicht als Skalarprodukt von Vierervektoren schreiben
$\Rightarrow$ Zusatzterm dieser Form würde Lorentzinvarianz verletzen

Folgerung: KG-Gleichung ist Gleichung für Teilchen mit $s = 0$!! (π-Mesonen)

d) Erfüllung der Kontinuitätsgleichung

Erinnerung klass. E-Dynamik

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\rho(\underline{r}, t)}_{\text{Ladungsdichte}} + \underbrace{\nabla \cdot}_{\text{(Div)}} \underbrace{\underline{j}(\underline{r}, t)}_{\text{Stromdichte}} = 0$$

Drückt Erhaltung der Gesamtladung aus

nicht-relativist. QM: Auch dort gibt es Kontinuitätsgleichung:

$$\rho(\underline{r}, t) = \psi^*(\underline{r}, t)\psi(\underline{r}, t) = |\psi|^2$$

Aufenthalts-Wahrsch.

entsprechender Strom:

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \frac{1}{2im}\left(\psi^{*}\nabla\psi - \psi\nabla\psi^{*}\right)$$

Wahrsch.-Strom

Schrödinger-Gl. $\Rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = 0$