

6.4 Das Keplerproblem

- Potential: $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha = \gamma m_1 m_2 > 0$
 ... anziehendes Potential
 Gravitationspotential

a) Lösung und Diskussion

$$\left. \begin{array}{l} \text{Parameter: } p = \frac{L^2}{\mu \alpha} \\ \text{Exzentrizität: } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu \alpha^2}} \end{array} \right\} (6.19) \rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}} \quad (6.21)$$

... „Kegel schnitt“

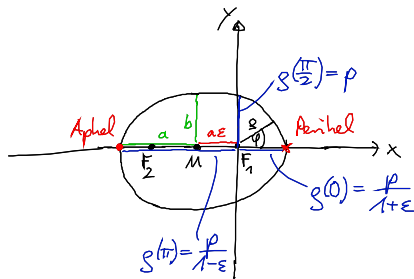
• mögliche Bahnkurven:

(1) $\varepsilon = 0, E = -\frac{\mu \alpha^2}{2L^2}$... Kreis: $r = p$

(2) $\varepsilon < 1, E < 0$... Ellipse

$$\left. \begin{array}{l} \text{kurzes Koord. mit } r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{langes Koord. } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} (6.21) \rightarrow \frac{(x + a\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Halbachsen: $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$
 $\rightarrow \varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$

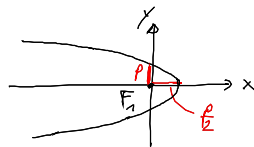


- F_1 ... Brennpunkte
- F_2 ... Sonne
- M ... Mittelpunkt
- $a\varepsilon = |MF_1| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$
- ε ... bestimmt Abweichung vom Kreis \triangleq Exzentrizität

Perihel: sonnennächster Pkt.
 Aphel: fernste Pkt.

(3) $\varepsilon = 1, E = 0$... Parabel

$$\left. \begin{array}{l} \text{kurzes Koord. } r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \text{langes Koord. } \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array} \right\} (6.21) \rightarrow x = -\frac{1}{2p} y^2 + \frac{p}{2} \quad (6.23)$$



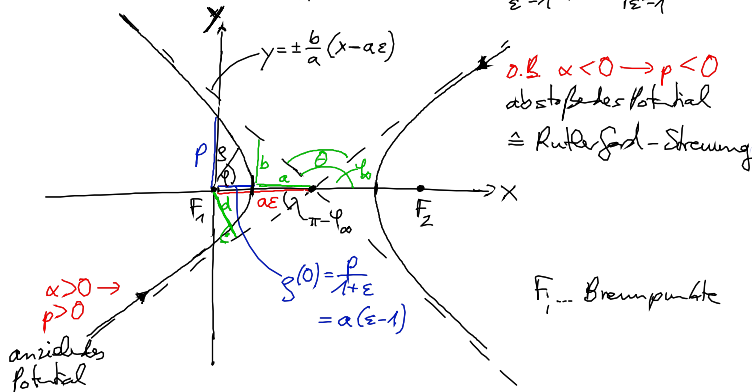
F_1 ... Brennpkt.

„Bahn eines Masse Körpers, die tangential von Erdoberfläche abgeschlossen wird und gerade dem Grav. feld entkommt.“ $[v_p = \sqrt{2gR} \quad (4.13)]$

(4) $\boxed{\varepsilon > 1, E > 0}$... Hyperbel, „Streuung“ eines Kometen an der Erde/Sonne

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{2\mu}}{r} \\ \varepsilon \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{2\mu}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (6.21) \\ \text{o.B.} \end{aligned} \rightarrow \frac{(x - a\varepsilon)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6.24)$$

„Halbachsen“: $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$



Streuung

Asymptoten: $g \rightarrow \infty \rightarrow \cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\varepsilon}$ (vgl. (6.21))

Ablenkwinkel/Streuungswinkel: $\Theta = \pi - 2(\pi - \varphi_\infty) = 2\varphi_\infty - \pi$

Stoßparameter: d

$$d(\Theta)? \quad d = a\varepsilon \underbrace{\sin(\pi - \varphi_\infty)}_{\varepsilon = -\frac{1}{\cos \varphi_\infty}} = -a \tan \varphi_\infty = -a \tan\left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = a \cot \frac{\Theta}{2}$$

mit $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} \stackrel{(6.20)}{=} \frac{\alpha}{2E} \rightarrow \boxed{d(\Theta) = \frac{|\alpha|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}} \quad (6.25)$

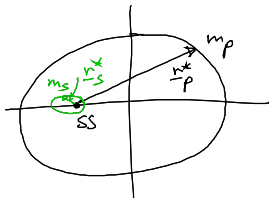
b) Keplersche Gesetze:

• $m_2 = m_s \dots$ Sonne (6.4) $r_2 = r_s = R - \frac{m_p}{M} r \xrightarrow{SS} r_s^* = -\frac{m_p}{M} r$
 $m_1 = m_p \dots$ Planet $r_1 = r_p = R + \frac{m_s}{M} r \xrightarrow{(R=0)} r_p^* = \frac{m_s}{M} r$

Schwerpt. system

$$\frac{m_{\text{Jupiter}}}{m_s} = 10^{-3}$$

$$\frac{m_{\text{Merk}}}{m_{\text{Erde}}} = \frac{1}{81}$$



• Keplers Gesetze: ($m_p \ll m_s \rightarrow r_s^* = 0, r_p^* = r$)

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen um die Sonne, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. Flächensatz (Drehimpulserhaltung): Kap. 2.3.
Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten (T) sind proportional zu den Kuben der großen Halbachsen (a) der Planetenbahnen: $T^2 = c a^3$

Beweis zu 3.: Fläche Ellipse: $A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt \stackrel{(2.10)}{=} \frac{L}{2\mu} \int_0^T dt = \frac{L}{2\mu} T$
 $\stackrel{!}{=} \pi ab$

aus (6.22) $b = \sqrt{ap} \stackrel{(2.20)}{=} \sqrt{\frac{a}{\mu\alpha}} L$
 $p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$

$\rightarrow T^2 = c a^3$ mit $c = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{\gamma m_1 m_2}$

$\rightarrow C = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_s + m_p)} \times \frac{4\pi^2}{\gamma m_s}$

... nur näherungsweise gleich für alle Planeten

c) Bewertungen

- Zentralspotential: - geschlossene Bahnen für $E < 0$: $\sim \frac{1}{r}, \sim r^2$ o.B.!!
- sonst: keine geschlossene Bahnen
z.B. „Perihel Drehung“



Bsp 1: Planetenbahnen um Sonne

- Störungen:
1. Grav. Kräfte untereinander
 2. Rel. Effekte

$U_{\text{eff}} = \underbrace{-\gamma \frac{mM}{r}}_{\text{Grav. pot.}} + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{Zentrif. pot.}} - \underbrace{\left(\gamma \frac{ML^2}{mc^2} \frac{1}{r^3} \right)}_{\substack{\text{von ART} \\ \neq !!! \\ \text{ca. ...}}} \quad \left. \vphantom{U_{\text{eff}}} \right\} \text{Abweichung von } \frac{1}{r} \quad (6.28)$

3. Abplattung der Sonne („Quadrupolmoment“)

Merkur: $\frac{\Delta\varphi}{\text{Jahr}} \approx 5,7131'' = 30\% (1.) + 10\% (2.)$
 Bogenmaß

NB: (6.28) gilt auch für Photonen $\underline{e} = -\frac{mM}{r}$

Bsp. 2: Satellit um Erde $\approx 100\%$ durch Abplattung der Erde

- Planetensysteme = Vielkörperprobleme \rightarrow chaotisches Verhalten
 $[\Delta x_0(t=0) = \epsilon \rightarrow \Delta x(t) \sim e^{\frac{t}{\tau_c}}]$

- Lenz'scher Vektor \underline{M} : weitere Konstante der Bewegung
 für $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$

$$\underline{M} = \underbrace{\mu(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})}_{-\underline{L}} \times \dot{\mathbf{r}} - \alpha \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = 0 \quad (6.29)$$