13.3 Euler-Lagrangesche Gln. 2. Art

Herleitung aus Hamiltonschem Prinzip

a) kons. Kräfte/general. Potentiale:

- $L = T - U \longrightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} L(\ldots)\,dt$

$$\rightarrow \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \frac{\delta S}{\delta q_j}\, \delta q_j(t)\,dt = 0$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (13.3)$$

b) nicht konservative Kräfte

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , j = 1 \ldots f} \qquad (12.26)$$

c) Potentialkräfte mit anholonomen Zwangsbed.:

$\longrightarrow$ Folie

13.4 generalisierte Impulse

- Def.: $$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \qquad (13.23)$$

... generalisierter / kanonische / zu q_j konjugierte $\}$ Impuls

- Bsp.:

(i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j \;, j = 1,2,3 \ldots$ kartesische Koord.

$$\left.\begin{array}{l} T = \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 \\ U = U(x_1,x_2,x_3) \end{array}\right\} L = T - U \longrightarrow \boxed{p_j = m\dot{x}_j} \qquad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em. Feld: $L = T - W = T - q\varphi + q\sum_i A_i \dot{x}_i$ (12.36)

Ladung   skalares/Vektorpotential

$$\xrightarrow{(13.23)} \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underbrace{m\dot{x}_i}_{\text{mechan. Impuls}} + \underbrace{q A_i}_{\text{Impuls des mitgeführten em. Feldes}}} \qquad (13.25)$$

NB: viele Teilchen mit holonomen Zwangsbed.:

$x_i = x_i(q_1 \dots q_f, t)$

$i = 1 \dots 3N$, $x_1, x_2, x_3 \dots$ 1. Teil. $x_4, x_5, x_6 \dots$ 2. Teil. $\vdots$

mit $\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$

in (12.35) $W = q(\varphi - \sum_i A_i \dot{x}_i)$

$$\boxed{\begin{aligned} W &= q\varphi - q \sum_j a_j \dot{q}_j + q \underbrace{\sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}}_{} \\ \text{mit } a_j(\{q_j\}, t) &= \sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \end{aligned}}$$

$A_1, A_2, A_3 \dots$ 1. Teil. $A_4, A_5, A_6 \dots$ 2. Teil. $\vdots$ (13.26)

$= 0$ für skleronome Zwangsbed.

... general. Vektorpotential

(iii) ebene Bewegung: $x, y \longrightarrow \rho, \varphi$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \underset{\substack{x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi}}{=} \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

radialer Impuls: $p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}$ (13.27)

Drehimpuls: $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = m\rho v_\varphi$

azimutale Geschw.

13.5 Symmetrien & Erhaltungssätze

- Lagrange-Glm.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $j = 1, \dots, f$

  mit $L = T - U$ .. kons. System

  $\hat{=}$ f DGlm. 2. Ord. in t

  $\longrightarrow$ Lsg. mit $2f$ Integ. konst.

  nicht immer explizit angebbar! [mit Fkt. $q_j = q_j(t)$]

  (" " " integrierbar)

- trotzdem: hilfreiche Aussagen über System möglich

$\longrightarrow$ **Noether Theorem:**
Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

kont. Symmetrie = kont. Transformation, die Verhalten des physikal. Systems nicht verändert.

Erhaltungsgröße = 1. Integral der Bewegung:

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst.} \quad \forall t$$

• Untersuche anhand von $L = T - U$

a) Impulserhaltung

• Def.: zyklische Koord.: $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0} \qquad (13.28)$$

... Symmetrie von L bzgl. Verschiebung q_j

• (13.28) in (13.3) $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \,!$

$$\longrightarrow \quad \boxed{p_j = \text{konst.}}$$

... Impulserhaltung $\hat{=}$ Konstante der Bewegung

• Bsp.: (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot x_i} = \text{konst.}$

Impulserhaltung $\longleftrightarrow$ „Translationsinvarianz des Raumes"
Homogenität

(ii) Teilchen im Zentralpotential $U = U(r)$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \text{konst!}$$

Drehimpulserhaltung
$\longleftrightarrow$ Drehinvarianz des Raumes
Isotropie

(iii) Vielteilchensysteme:

– Schwerpkts. Koord. $R_j = q_j$ $\hat{=}$ Verschiebung des ges. Systems

falls $\frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \longrightarrow P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot R_j} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtimpulses
[Bew.: Goldstein / Nolting]

– Drehung des Gesamtsystems um $\varphi = q_j$ um Achse $\underline{n}$:

falls: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses [Bew.: Goldstein]

b) Energieerhaltung: $\longleftrightarrow$ „Invarianz unter Zeittranslation"

• also: $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0} \xrightarrow[(13.29)]{} \frac{d}{dt} L = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}} \dot q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \ddot q_j \Big)$$

fasse

$$\longrightarrow\ 0 = \frac{d}{dt}\Big[L - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{p_j} \dot q_j\Big]$$

$$\longrightarrow\ \boxed{H = \sum_j p_j \dot q_j - L = \text{konst.}} \quad (13.30)$$

... Hamilton Fkt.!

- Bedeutung von H:

mit $L = T - U$ $\xrightarrow[p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}]{(13.30)}$ $H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \dot q_j - T + U \quad (13.31)$

– kinet. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i^2$ mit $\dot{\underline{r}}_i \underset{\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_j\}, t)}{=} \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot q_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} a_{jk} \dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{f} b_j \dot q_j + c \\ \text{mit } a_{jk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \overset{!}{=} a_{kj} \\ b_j &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \\ c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right)^2 \end{aligned}} \quad (13.32)$$

– skleronome Zwangsbed.:

$\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0\,!$ $\xrightarrow[\substack{c=0 \\ b_j=0}]{}$ $\boxed{T = \frac{1}{2} \sum_{jk} a_{jk} \dot q_j \dot q_k} \quad (13.33)$

... homog. Fkt. 2. Ordng in $\dot q_j$

Term aus (13.31) $\longrightarrow$ $\boxed{\sum_j \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}}_{} \dot q_j = 2T} \quad (13.34)$

$\begin{pmatrix} a_{jk} \\ = a_{kj} \end{pmatrix} = \cancel{\frac{1}{2}} \sum_k a_{jk} \dot q_k$

mit (13.34) in (13.31): $H = 2T - T + U$

$$\longrightarrow\ \boxed{H = T + U} \quad (13.35)$$

... Gesamtenergie

– Bem.: (i) gilt für konservative Systeme mit skleronomen, holonomen Zwangsbed.

(ii) o.B.: gilt auch für generalisierte Potentiale: $U = q\varphi - q \sum_i A_i \dot x_i$ (12.36)

aber: $H = T + q\varphi$

c) Eichinvarianz L:

Invarianz von $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ (*)

unter Eichtransformation: $L \longrightarrow L + \frac{d}{dt} f(\{q_j\}, t)$ (13.36)

wobei $f(\ldots)$ beliebige Fkt. ist

Beweis: „Übung"

(i) Setze in (*) ein

(ii) $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt + f(t_2) - f(t_1)$

$\delta S = 0$!

$\longrightarrow$ L selber hat keine „physikal." Bedeutung