

Wkt: Quantisierung des freien Strahlungsfeldes : $\rho(\underline{r}, t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r}, t) = 0$

Klass. Elektrodynamik, Potentialgleichung in den Coulombnormierung ($\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) = 0$)

$$-\Delta \underline{A} + \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0 \quad \left(\Phi^{(kl)} \text{ ist für } \rho=0 \text{ immer Null in der Coulombnormierung!} \right)$$

Lösungsansatz: $\underline{A}(\underline{r}, t) = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{1}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{1/2} \left(a_{\underline{k}} u_{\underline{k}}(\underline{r}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + a_{\underline{k}}^* u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) e^{+i\omega_{\underline{k}} t} \right)$

Entwickelt nach Eigenmoden

Transversal! ($\nabla \cdot u_{\underline{k}} = \nabla \cdot u_{\underline{k}}^* = 0$)

und $\Delta u_{\underline{k}}(\underline{r}) + \frac{\omega_{\underline{k}}^2}{c^2} u_{\underline{k}}(\underline{r}) = 0$

$$\int d\underline{r} u_{\underline{k}}^*(\underline{r}) u_{\underline{k}}(\underline{r}) = \delta_{\underline{k}\underline{k}'}$$

Hamiltonian des freien Strahlungsfeldes?

direkte (wenn auch nicht rigorose) Weg: Gewinn \hat{H} aus dem Klass. Ausdruck für die Energie E des elektromagnet. Feldes

$$E = \int d\underline{r} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\underline{E}(\underline{r}, t) \right)_{\text{el. Feld}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\underline{B}(\underline{r}, t) \right)_{\text{mag. Feld}}^2 \right)$$

benutze (Coulomb-Gesetz) $\underline{E} = -\dot{\underline{A}}(\underline{r}, t)$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

insgesamt ergibt sich (nach länglicher Rechnung)

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2} (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}})$$

Beitrag aus \underline{E}^2

nach Wasser! $+ \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \frac{\hbar \omega_{\underline{k}}}{2} (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}})$

Beitrag aus \underline{B}^2

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2} \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} (a_{\underline{k}} a_{\underline{k}}^* + a_{\underline{k}}^* a_{\underline{k}})}$$

Jetzt Quantisierung:

Energie $\underline{E} \rightarrow \hat{H}$

$a_{\underline{k}} \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}$
Verichte

$a_{\underline{k}}^* \rightarrow \hat{a}_{\underline{k}}^\dagger$
Erzeuge

mit $[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}^\dagger] = \delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$

$[\hat{a}_{\underline{k}}, \hat{a}_{\underline{k}'}] = 0$

also bosonische Vertauschungsrelationen!
wie bei den Photonen!

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{a}_{\underline{k}} + \hat{a}_{-\underline{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{H} = \sum_{\underline{k}} \hbar \omega_{\underline{k}} \left(\hat{N}_{\underline{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \hat{N}_{\underline{k}} = \hat{a}_{\underline{k}}^\dagger \hat{a}_{\underline{k}}$$

Hamiltonoperator des "freien" elektromagnet. Feldes

$$(g(\underline{x}, t) = 0, \quad j(\underline{x}, t) = 0)$$

Bemerkungen:

- Die zu diesem \hat{H} gehörenden Quantenteilchen heißen Photonen
(Lichtquanten)

- Photonen sind Bosonen, wie durch die Kommutatorrelationen angedeutet!

"Alternativbegründung:

- man weiß aus Experimenten, dass Photonen Spin 1 haben, d.h. s ganzzahlig
 \rightarrow Bosonen

- Experimente zeigen, dass die statistischen Eigenschaften bosonischer Quanten haben (Bose-Einstein Statistik)
 \rightarrow Planck'sche Strahlungsgesetze, Heisenberg'sche Statistik!

- Analog zur Erweise wird auch das Potential \underline{A} quantisiert

$$\underline{A} \rightarrow \hat{\underline{A}} = \sum_{\underline{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega_{\underline{k}} \epsilon_0} \right)^{1/2} \left(\hat{a}_{\underline{k}} \underline{u}_{\underline{k}}(\underline{x}) e^{-i\omega_{\underline{k}} t} + \hat{a}_{-\underline{k}} \underline{u}_{-\underline{k}}(\underline{x}) e^{i\omega_{\underline{k}} t} \right)$$

IV.3. Lagrange-dichte Formalismus

Famalisimus:

Klass. Punktmechanik:
(z.B. eindimensional)

Lagrangefunktion
 $L(q, \dot{q}, t)$

generalisierte Koordinaten

Klass. Feldtheorie:

Lagrange-dichte
 $L = \int dx \mathcal{L}$

mit $\mathcal{L} = (\psi_i, \psi_{i,\mu})$

mit $\psi_i = \psi_i(x, t)$
Felder

$= L(x^\mu) = L(t)$

falls explizit
Zustandsabhängigkeit vorhanden
in \mathcal{L}

$\psi_{i,\mu}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_i(x, t)$

$x^\mu = (t, x, y, z)$

z.B. $\psi_{i,0}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = \dot{\psi}_i$

Es gilt ein Wirkprinzip

$$S = \int dx^\mu L(x) = \int dt \int dx \int dy \int dz \mathcal{L}$$

mit $\delta S = 0$

=> Bewegungsgleichung für Felder:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,\mu}} = 0$$

kanonische Einsteinsche Summenkonvention!

völlig analog zu $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0$ für Punktmechanik

Kanonisches Impulsfeld zum Feld ψ_i

$$\Rightarrow \pi_{\psi_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \pi_i$$

(analog zu $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$)

Übergang zur Hamiltonformulierung.

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H} = \sum_i \dot{\varphi}_i \pi_i - \mathcal{L}$$

↳ Hamiltondichte
↳ Legendretransformierte

Wir haben jetzt also kanonisch konjugierte Feldvariablen definiert

Quantisierung

ersetze $\varphi_i \rightarrow \hat{\varphi}_i$, $\pi_i \rightarrow \hat{\pi}_i$
 $(\varphi_i^* \rightarrow \hat{\varphi}_i^+)$, $\frac{\pi_i}{\varphi_i} \rightarrow \frac{\hat{\pi}_i}{\hat{\varphi}_i}$

mit Vertauschungsregeln

$$[\hat{\varphi}_i(x, t), \hat{\pi}_j(x', t)]_{\pm} = i \hbar \delta_{ij} \delta(x - x')$$

mit $[\dots]_-$ Bosonen

$[\dots]_+$ Fermionen

analog zu den Definitionen in Kap. II (Vielteilchensystem)

dann $H \rightarrow \hat{H}$

Anwendung der Klass. Feldtheorie in der Elektrodynamik

a) Elektrostatik

irrotationales Feld: $\underline{E}(r) = -\nabla \Phi(r)$

Ansatz für Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \underbrace{\epsilon_0 \frac{1}{2} (\nabla \Phi(r))^2}_{\text{Energiedichte des elektrostatischen Feldes}} - \underbrace{g(r) \Phi(r)}_{\substack{\text{potentielle Energie} \\ \text{einer Ladungsdichte } g(r) \\ \text{im Potential } \Phi(r)}}$$

Die Feldvariable ist also $\Phi(r)$!

Die Lagrange-Dichte betrachten wir hier als fest vorgegeben!

Lagrange-Fg. (beachte: hier keine Zeitableitung!)
da $\phi(\underline{x})$ statisch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial x_k} \stackrel{!}{=} 0$$

$$-g(\underline{x}) - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l=1}^3 \frac{\epsilon_0}{2} \epsilon_{kl} \epsilon_{lm} \frac{\partial \phi}{\partial x_l} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow -g(\underline{x}) - \epsilon_0 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_k}}_{-E_k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{E} = \frac{g(\underline{x})}{\epsilon_0}}$$

(Gauss'sches Gesetz)

($\nabla \times \underline{E} = 0$ ist automatisch erfüllt durch $\underline{E} = -\nabla \phi$)

b) Magnetostatik

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A}(\underline{x}))^2}_{\underline{B}} - \underline{j}(\underline{x}) \cdot \underline{A}(\underline{x})$$

fest vorgegebene Stromdichte

$$\text{erfolgt: } \boxed{\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{x})}$$

Ampere'sches Gesetz

Feldlinien sind hier die 3 Komponenten des Vektorpotentials $A_k(\underline{x})$ mit $k=1,2,3$

($\nabla \cdot \underline{B} = 0$ wieder automatisch erfüllt durch $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$)

c) Elektrodynamik

$$\text{hier } \underline{E} = -\nabla \phi - \dot{\underline{A}}, \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

(Keine Zerlegung des Erds)

erster Versuch für \mathcal{L} : Einfache Addition von den Ausdrücken für die Elektro- und Magnetostatik

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{(\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2}_{\underline{E}^2} + \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{(\nabla \times \underline{A})^2}_{\underline{B}^2} - \rho\phi - \underline{j} \cdot \underline{A}$$

liefert mit alle Maxwellgleichungen nichts!

Richtige Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2 - \rho\phi + \underline{j} \cdot \underline{A}$$

- Feldvariablen sind $\phi(\underline{r}, t)$ und $A_\mu(\underline{r}, t)$ mit $\mu=1,2,3$
(x, y, z)
- Die "Quellen" $\rho(\underline{r}, t)$ und $\underline{j}(\underline{r}, t)$ sind fest vorgegeben!

Lagrange-Gl bzgl. ϕ führt auf $\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r}, t)}{\epsilon_0}$

" bzgl. der Komponenten von \underline{A} führt auf $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$

Die beiden anderen Maxwellgl. folgen aus den Def. $\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$
 $\Rightarrow \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{A})$
 $= -\dot{\underline{B}}$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Betrachte nun vor allem die Quantisierung des ^{freien} Strahlungsfeldes

Sei also $\rho(\underline{r}, t) = 0$, $\underline{j}(\underline{r}, t) = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} (\nabla\phi + \dot{\underline{A}})^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2 \quad \left(= \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right)$$

Mit Coulombbedingung ($\nabla \cdot \underline{A} = 0$) können wir dann auch $\Phi = 0$ setzen,
 also $\underline{E} = -\dot{\underline{A}}$

$$\mathcal{L} = \frac{\epsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2 \quad (*) \quad \text{Feldvariablen } A_k(x, t) \text{ mit } k=x, y, z$$

$$\text{Lagrange-} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} = 0$$

führt auf $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0$ wie gefordert!
 Potentialgleichung in der Coulombbedingung

Definiere nun die kanonischen konjugierten Impulse

$$\Pi_{A_k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} \quad (*) \quad \epsilon_0 \dot{A}_k = -\epsilon_0 E_k \quad \text{Komponente des elektr. Feldes}$$

$\Rightarrow A_k$ und E_k sind kanonisch konjugierte Variablen.
 Diese sind zu quantisieren!

Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^3 \dot{A}_k \Pi_{A_k} - \mathcal{L} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^3 \underbrace{\epsilon_0 (\dot{A}_k)^2}_{\epsilon_0 \dot{\underline{A}}^2} - \frac{\epsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \dot{\underline{A}}^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \quad \text{mit} \quad \underline{E} = \underline{E}(x, t)$$

$$\underline{B} = \underline{B}(x, t)$$

Hamiltonfunktion

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

Konstant mit klass. Elektrodynamik!

$$E = \int d^3x \left(\frac{\epsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right)$$

Quantisierung

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left(\epsilon_0 \left(\frac{\partial \hat{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \times \hat{A}(\mathbf{r}, t))^2 \right)$$

Setze hier wieder den quantisierten Ausdruck für \hat{A} ein
(Ansatz am Eigenmoden)

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\hat{N}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}$$

entspricht dem früher
behandelten Ausdruck

IV. 4. Kopplung zwischen Teilchen und Feldern

Zunächst: Erinnerung an 1 ^{Relativ-}Teilchen im elektromagnet. Feld
(nicht-relativistisch)

Lagrangefunktion. (kein Vektorpot. System!)

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2}_{\text{Kinet. Energie}} - q \phi(\mathbf{r}, t) + q \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_k} \stackrel{!}{=} 0$ $k=1,2,3$

$$\Rightarrow m \ddot{r}_k = q E_k(\mathbf{r}, t) + q (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))_k$$

mit $\mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{A})$
 $E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial r_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}$

$\stackrel{\text{Lorentz}}{=} \mathbf{F}_k$

Komponente der Lorentzkraft