

Wk. Motivation Dirac-Gl.

- Diff. Gleichung ersten Ordnung in der Zeit und im Raum

(KG-Gl. führt auf  
Wirkungsdichtenschwierigkeiten  
bei Dichte!)

(damit Lorentz-invariant formuliert ist)

- Beschreibung von Teilchen mit Spin, insbesondere  $s = \frac{1}{2}$  (Elektron!)

relativist. Energie-Impuls-Beziehung muss (wie bei KG-Gleichung) berücksichtigt sein!

Ansatz: 
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi(t)$$

↖ Dirac-Operator

mit 
$$\hat{H}_D = \left( c \sum_i \hat{\alpha}_i \hat{p}_i + \hat{\beta} m_0 c^2 \right)$$

↖  $\hat{p}_i$  in der Ortsdarstellung

$i = 1, 2, 3$   
(x, y, z)

(\*)

Man sieht sofort: (\*) ist <sup>Diffgl.</sup> 1. Ordnung in der Zeit und 1. Ordnung im Raum  
(denn  $\hat{H}_D$  ist linear im Impulsoperator!)

Idee hinter (\*):

Linearisieren die relativist. Energie-Impuls-Beziehung

Klass:  $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \iff E^2 - (c^2 p^2 + m_0^2 c^4) = 0 = \underset{=0}{(E - c p - m_0 c^2)} (E + c p + m_0 c^2)$

$(a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

Ansatz für die Linearisierung:

(\*\*) 
$$\left( E - c \sum_i \hat{\alpha}_i \hat{p}_i - \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \left( E + c \sum_j \hat{\alpha}_j \hat{p}_j + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \stackrel{!}{=} 0$$

führt auf die richtige Energie-Impuls-Relation falls bestimmte Anfangsbedingungen für die  $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}$  gelten! dazu später!

Betrachte nun von  $(**)$  den linken Faktor (falls dieser Null ist, ist  $(**)$  stets erfüllt) und benutze:  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ ,  $p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$  (Korrespondenzregel)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - c \hat{\alpha}^i \frac{\hbar}{i} \partial_i \psi - \hat{\beta} m_0 c^2 \psi = 0 \rightarrow (*)$$

Kompaktere Schreibweise:

$$\hat{H}_D = c \hat{\alpha}^i \frac{\hbar}{i} \partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2 \quad i=1,2,3$$

mit Einsteinscher Summenkonvention!

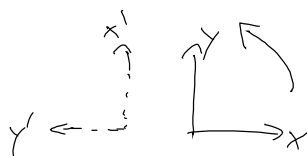
$$\Rightarrow \hat{H}_D = c \hat{\underline{\alpha}} \cdot \hat{\underline{p}} + \hat{\beta} m_0 c^2 \quad \hat{\underline{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

3-dim. Impulsoperatoren

Frage: Was sind die Koeffizienten  $\hat{\alpha}^i$  und  $\hat{\beta}$ ?

Minimalforderung:  $\hat{H}_D$  soll invariant gegen Drehung sein

$\rightarrow \hat{\alpha}^i$  können nicht einfach Zahlen



$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \partial_{x'} &= \partial_y \\ \partial_{y'} &= -\partial_x \end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel!

das muß kommutativ werden!

Daher nimmt man an (Dirac)

- die  $\hat{\alpha}^i$  und  $\hat{\beta}$  sind  $N \times N$  Matrizen (damit erfüllt der 3-Komponentige Vektor  $\hat{\underline{\alpha}}$  Metrie)
  - die  $\hat{\alpha}^i$  und  $\hat{\beta}$  sind hermitesch
- $\rightarrow$  dann ist der ganze Dirac-Operator hermitesch
- (führt auf eine positive Dichte, wenn man die Normierbedingung herstellt)

↳ auch  $\hat{H}_D$  ist eine  $N \times N$  Matrix (folgt aus der Struktur von  $\hat{H}_D$ )

→  $\psi$  ist  $N$ -dim. Vektor, d.h.  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}$  "Spinor"

Also:

Dirac-Gleichung ist eine Matrixgleichung für den Spinor  $\psi$

Genauere Form der Matrizen  $\hat{\alpha}^i$  und  $\hat{\beta}$ ?

Erinnerung: ~~Konstante~~ <sup>Jedem der</sup> mit der relativist. Energie-Impuls-Beziehung!

Wir fordern hier: Die Komponenten des Spinors  $\psi$  müssen die KG-Gleichung erfüllen. Dann dann ist die relativist. Energie-Impuls-Beziehung automatisch erfüllt.

Weg:

Wende die Dirac-Gl. zweimal hintereinander auf einen Spinor an.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \hat{H}_D \left( \hat{H}_D \psi \right)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \left( c \frac{\hbar}{i} \hat{\alpha}^i \partial_i + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \left( c \frac{\hbar}{i} \hat{\alpha}^j \partial_j + \hat{\beta} m_0 c^2 \right) \psi$$

$i, j = 1, 2, 3$

$$= -\hbar^2 c^2 \hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j \psi$$

$$+ \frac{\hbar^2 m_0^2 c^4}{i} (\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i \partial_j) \psi$$

$$+ \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi$$

Annahme:  $\hat{\alpha}^i$  antisymmetrisch

Umschreibung:

1. Term: Symmetrisierung:  $\hat{\alpha}^i \partial_i \hat{\alpha}^j \partial_j = \hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j \partial_i \partial_j$

Erster Summand:  $= \frac{1}{2} (\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i) \partial_i \partial_j$

Annahme:  $\hat{\beta}$  antisymmetrisch

2. Term:  $\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}_i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^j \partial_j = (\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \partial_i$

$$\Rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\hbar^2 c^2}{2} (\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i) \partial_i \partial_j \psi$$

$$+ \frac{\hbar m_0 c^3}{i} (\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i) \partial_i \psi$$

$$+ \hat{\beta}^2 m_0^2 c^4 \psi \quad \text{I}$$

$$E \hat{=} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\hat{p} \hat{=} \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\hat{=} \left( \hat{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi$$

$$= \left( -\hbar^2 c^2 \partial_i^2 + m_0^2 c^4 \right) \psi \quad \text{II}$$

Klein-Gordon-Gl.  
bzw. relativist.  
Energie-Impuls-Relat.

Damit I = II gilt, müssen wir fordern:

- ①  $\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^j + \hat{\alpha}^j \hat{\alpha}^i = 2 \delta_{ij} \hat{1}$
  - ②  $\hat{\alpha}^i \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^i = 0$
  - ③  $\hat{\beta}^2 = \hat{1}$
- muß gelten für alle  $i, j = 1, 2, 3$
- $\Rightarrow$  ① und ② sagen aus, daß die Matrizen  $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$  antikommutieren

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

beachte: Aus ① folgt auch: ( $j=i$ )

$$2\hat{\alpha}^i \hat{\alpha}^i = 2\hat{1} \Rightarrow \hat{\alpha}^i{}^2 = \hat{1}$$

①\*

Weitere Folgerung aus ①, ②, ③

- aus ②:  $\hat{\alpha}^i = -\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}$

- aus ③:  $\hat{\beta}^{-1} = \hat{\beta}$

a) Spur:  $Sp(\hat{\alpha}^i) \stackrel{\text{Zykl.-invar.}}{=} -Sp(\hat{\beta} \hat{\alpha}^i \hat{\beta}^{-1}) = -Sp(\underbrace{\hat{\beta}^{-1} \hat{\beta}}_{\hat{1}} \hat{\alpha}^i)$   
 $= -Sp(\hat{\alpha}^i)$

$\Rightarrow Sp(\hat{\alpha}^i) = 0$  (Spur  $\hat{=}$  Summe der Eigenwerte)

$\Rightarrow$  Summe der Eigenwerte von  $\hat{\alpha}^i$  muss Null sein!

b) Es gilt  $(\hat{\alpha}^i)^2 = \hat{1}$

$\Rightarrow$  Eigenwerte müssen gleich  $\pm 1$  sein!

Kombiniere a) und b):

Die Dimension  $N$  der Matrizen muss gerade sein

(d.h. die Anzahl positiver und negativer Eigenwerte muss gleich sein!)

aber:

$N=2$  langt nicht aus, da man dann nicht genügend unabhängige Matrizen zur Erfüllung der Forderungen ①-③ hat

$\Rightarrow$  Die niedrigste mögliche Dimension von  $\hat{\alpha}^i$  und  $\hat{\beta}$  ist:

$N=4$



$\Rightarrow \hat{H}_D$  ist n-dimensional,  $\Psi$  ist  $\ell$ -dimensionale Spine

Explizite Darstellung der "Dirac-Koeffizienten"  $\hat{\alpha}^i, \hat{\beta}$ :

"Standard-Darstellung"

$$\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_{xz}^i \\ \hat{\sigma}_{xz}^i & 0 \end{pmatrix} \quad i=1,2,3$$

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{zz} & 0 \\ 0 & -\hat{\lambda}_{zz} \end{pmatrix}$$

Pauli-Spinmatrizen (Zweidimensional)

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Pauli-Spinmatrizen

$$(\hat{\sigma}^i)^2 = \underline{1}, \quad [\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]_+ = 0, \quad [\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j] = 2i \epsilon_{ijk} \hat{\sigma}^k$$

Eigenwert der  $\hat{\sigma}_i$ :  $\lambda = \pm 1$

$$\hat{\sigma}_i^+ = \hat{\sigma}_i \quad (\text{Kommutator!})$$

Entwurf: die  $\hat{\sigma}^i$  entsprechen Darstellung von Drehimpulsoperatoren  $\hat{L}$  mit  $\ell = \frac{1}{2}$

$$\text{allg: } \hat{L}^z |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$$

$$\hat{L}_z |\ell, m\rangle = \hbar m |\ell, m\rangle$$

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2} (\hat{L}_+ + \hat{L}_-), \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2i} (\hat{L}_+ - \hat{L}_-) \quad ; \quad \hat{L}_+, \hat{L}_- \text{ Ladderoper.}$$

$$\text{z.B. } \hat{L}_+ |\ell, m\rangle = \hbar \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)} |\ell, m+1\rangle$$

Speziell  $l = \frac{1}{2}$ :  $\hat{L}^2 | \frac{1}{2}, m \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 | \frac{1}{2}, m \rangle$  mit  $m = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$   
 $\hat{L}_z | \frac{1}{2}, m \rangle = \frac{\hbar}{2} | \frac{1}{2}, m \rangle$  (für  $m = \pm \frac{1}{2}$ )

Matrixdarstellung von  $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$  für  $l = \frac{1}{2}$  in den Eigenzuständen  $|l, m\rangle$   
 führen auf die Pauli-Spinormatrizen!  
 z.B.  $\hat{L}_x = \frac{\hbar}{2} \sigma^1$

Zurück zum Dirac-Operator

$$\hat{H}_D = c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m_0 c^2 \quad (= c \alpha^1 \hat{p}_1 + c \alpha^2 \hat{p}_2 + c \alpha^3 \hat{p}_3) + \beta m_0 c^2$$

Einsetzen der Ergebnisse für  $\alpha^i$  und  $\beta$   
 (Standard-Darstellung)

$$\Rightarrow \hat{H}_D = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & 0 & c p_z & c(p_x - i p_y) \\ 0 & m_0 c^2 & c(p_x + i p_y) & -c p_z \\ \hline c p_z & c(p_x - i p_y) & -m_0 c^2 & 0 \\ c(p_x + i p_y) & -c p_z & 0 & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \quad 4 \times 4 \text{ Matrix}$$

### Dirac-Gleichung in kovarianter Form

Wir haben bereits gesehen: Dirac-Gl. ist erster Ordnung in der Zeit und im Ort  
 (Linearität im Impuls)

$\Rightarrow$  Raum-Zeit-Symmetrie ist schon mal gewährleistet!

Multipliziere die Dirac-Gl. zunächst mit  $\frac{1}{c} \hat{\beta}$  (von links)

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}_D \psi$$

$$\left( i \hbar \frac{1}{c} \hat{\beta} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c} \hat{\beta} (c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m_0 c^2) \right) \psi = 0$$

$$\text{mit } \partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \text{ und } \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla = -i\hbar \nabla$$

$$\Rightarrow (i\hbar \hat{\beta} \partial_0 + i\hbar \hat{\beta} \alpha^i \partial_i - \underbrace{\hat{\beta}^2}_{\hat{1}} m_0 c) \psi = 0$$

$$\Leftrightarrow (-i\hbar (\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \alpha^i \partial_i) + m_0 c \hat{1}) \psi = 0$$

Definieren nun neue Dirac-Matrizen:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\gamma}^0 &= \hat{\beta} \\ \hat{\gamma}^i &= \hat{\beta} \alpha^i \end{aligned} \right\} \text{ bilden den } \gamma\text{-Vektor } \hat{\gamma}$$

und dividieren durch  $\hbar$

(wobei die Einheitsmatrizen  $\hat{1}$   $\gamma$ -dim. Matrizen sind!)

$$\Leftrightarrow \left( -i \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{m_0 c}{\hbar} \hat{1} \right) \psi = 0$$