

3.) Quantisierung d. Schrödingerfelds $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$ (Paulispinor)

3.1. Zusammenfassung bisheriger Ergebnisse

Paulispinor $\vec{\psi}(\vec{r}, \vec{s}, t)$, Schrödingerfeld $\psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \psi(x, t)$

" x " \rightarrow " \vec{r}, \vec{s} "

Quantisierf. : $[\psi(x, t), \psi^\dagger(x', t)]_{\pm} = \delta(x-x')$ 1. Kommutator
 (Feld (Impuls)) gleichzeitig! \uparrow $\delta(\vec{r}-\vec{r}') \delta_{ss'}$
 Fermion
 Boson: auch in Übereinstimmung mit Exp.

$$[\psi^{(+)}(x, t), \psi^{(+)}(x', t)]_{\pm} = 0$$

$H_0 = \sum_s \int d^3x \psi^\dagger(x, t) \underbrace{H_0^{(cl)}(x, p)}_{\text{Einkl. d. H. aus Schrödingergleichung}} \psi(x, t)$ 2. Hamiltonian
 nicht- ω

$$\dot{\psi} = \frac{i}{\hbar} [H_0, \psi(x, t)] \quad 3. \text{ Heisenberggleichg.}$$

Modenentwicklung

$H_0^{(cl)}(x, p) = \hbar^2 \frac{\Delta}{2m_0} + \hat{u}(\vec{r}, \vec{s}, p)$ 4. Eigenwertproblem
 d. Teilchen $H_0^{(cl)}$
 in (a) Quantisierung.
 $H_0^{(cl)} \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r}, \vec{s}) = \epsilon_\lambda \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r}, \vec{s})$

$\vec{\psi} = \sum_\lambda \underbrace{a_\lambda(t)}_{\text{Modenoperator}} \vec{\varphi}_\lambda(\vec{r}, \vec{s})$, $\omega_\lambda = \frac{\epsilon_\lambda}{\hbar}$ 5. Moden-
 entwicklung

$$H_0 = \sum_\lambda \hbar \omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda, \quad [a_\lambda(t), a_{\lambda'}^\dagger(t)]_{\pm} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\dot{a}_\lambda = \frac{i}{\hbar} [H_0, a_\lambda] = -i\omega_\lambda a_\lambda$$

Observable $\hat{O} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{ext}} \stackrel{z.B.}{=} \frac{\partial}{\partial \phi_{ext}} \left\{ \int d^3r \left[\psi^\dagger(r,t) \phi_{ext}(r,t) \psi(r,t) \right] \right\} = \int d^3r \psi^\dagger \psi$

Observable: Ladungsdichte Strom analyt. Feld El-Dichte

durch Ableitung nach Maxwellfeldern (ϕ, A, E, B) werden den Quelle $(j, \rho, \text{dipol Moment.})$ definiert $\hat{=} \text{Observable}$

Erwartungswerte $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \overline{F}$ (wird über $a_\lambda^\dagger, a_\lambda$ berechnet)

Zustand $|\psi\rangle$ als nächstes gesucht, $\langle \psi | \psi \rangle$

3.2 Eigenwertproblem und Interpretation

3.2.1. Eine Feldmode

Fermion, Boson i.a.: $H_0 = \sum_\lambda \epsilon_\lambda \omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda = \sum_\lambda H_\lambda$

$H_\lambda |u_\lambda\rangle = a_\lambda^\dagger a_\lambda |u_\lambda\rangle$: Eigenwertproblem d. Moden-H: H_λ

Kommutatorrelation $[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}$ $\hookrightarrow a_\lambda^\dagger a_\lambda |u_\lambda\rangle = u_\lambda |u_\lambda\rangle$

Beschupzahl operat einer Mode: $a_\lambda^\dagger a_\lambda \equiv u_\lambda$

Beschupzahl: $u_\lambda = \langle u_\lambda | a_\lambda^\dagger a_\lambda | u_\lambda \rangle = \langle u_\lambda | u_\lambda | u_\lambda \rangle$

\rightarrow "es gibt u_λ - Teilchen in der Mode λ "

\rightarrow man bezieht sich damit sofort in Sprache der Vielteilchenphysik

Fermionen: Plusquantisierung. $a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} + a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} = \mathbb{1}_{\lambda}$
 $a_{\lambda} a_{\lambda} + a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}^{\dagger} = 0 \rightarrow \underbrace{a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}}_0 = -a_{\lambda} a_{\lambda}$

a) zeige mögl. Werte für n_{λ} sind: 0 und 1

Beweis: betrachte: $\underbrace{a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}}_0 = a_{\lambda}^{\dagger} (1 - a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}) a_{\lambda}$

$$= a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} - \underbrace{a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}}_0 = a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

$$\rightarrow \underline{n_{\lambda}^2} = n_{\lambda} \rightarrow \underline{n_{\lambda}^2} |n_{\lambda}\rangle = \underline{n_{\lambda}} |n_{\lambda}\rangle$$

$$n_{\lambda}^2 |n_{\lambda}\rangle = n_{\lambda} |n_{\lambda}\rangle$$

$$\rightarrow \underline{n_{\lambda}^2} = n_{\lambda} \Rightarrow \underline{n_{\lambda} = 0, 1} \quad \text{„Pauli-Prinzip“}$$

(Besetz. mit 1 Fermion
oder Nichtbesetz.)

b) Wellenfunktion zu $n_{\lambda} = 0, 1$ werde als

$|n_{\lambda} = 0, 1\rangle$ geschrieben und sind mit $\underline{|1\rangle = a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle}$ und $\underline{|0\rangle}$ gegeben

Beweis: $n_{\lambda} = 0$ sei der unbesetzte Zustand (Vakuum) mit $|0\rangle$ geg.
 definiert durch $a_{\lambda} |0\rangle = 0$

betrachte: $\underline{\underline{a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle}} = a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle$

Normalordnung oft günstig:

alle Kreisläufe a_{λ} nach rechts

$$= a_{\lambda}^{\dagger} (1 - a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}) |0\rangle = a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = \underbrace{1 \cdot a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle}_{|1\rangle}$$

$$\rightarrow a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = |1\rangle \quad \checkmark$$

c) Operatorwirkg.

$$a_{\lambda}^{\dagger} |1\rangle = a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = -a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = 0$$

$$a_{\lambda} |1\rangle = a_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = (1 - a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}) |0\rangle = |0\rangle$$

$$a_{\lambda}^{\dagger} |0\rangle = |1\rangle$$

$$a_{\lambda} |0\rangle = 0$$

Bosonen Kleinsteisidierg. $a_{\lambda} a_{\lambda'}^{\dagger} - a_{\lambda'}^{\dagger} a_{\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}$

QMI $a_{\lambda} a_{\lambda'} - a_{\lambda'} a_{\lambda} = 0$

a) $u_{\lambda} = 0, 1, 2, \dots$

b) $|0\rangle, |u_{\lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{u_{\lambda}!}} (a_{\lambda}^{\dagger})^{u_{\lambda}} |0\rangle$

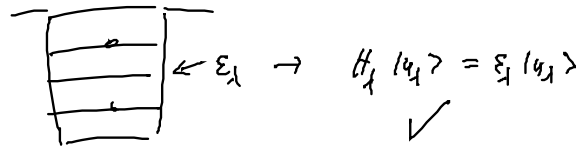
c) $a_{\lambda}^{\dagger} |u_{\lambda}\rangle = (u_{\lambda} + 1)^{1/2} |u_{\lambda} + 1\rangle$

$$a_{\lambda} |u_{\lambda}\rangle = u_{\lambda}^{1/2} |u_{\lambda} - 1\rangle$$

$$a_{\lambda} |0\rangle = 0$$

3.2.2. Viel mod Zustände

Bsp. Schwingfeld in Kiste
 H_λ gelöst:



gesamtproblem: $H_0 = \sum_\lambda \epsilon_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda$: $H_0 |\psi\rangle = E |\psi\rangle$

da H_0 ein Summe ungekoppelter Teilsysteme ist.

so ist die Lösg. des gesamtproblems durch die Summe aller Teilergebnisse und durch die Produkt wellenfunkt. der Teilsysteme gegeben.

$$E = \sum_\lambda \epsilon_\lambda u_\lambda, \quad |\psi\rangle = \prod_\lambda |u_\lambda\rangle = |u_{\lambda 1}, u_{\lambda 2}, \dots\rangle$$

Zustände sind durch Angabe der Besetzungszahl der Mode gegeben,
 gilt f. gekoppelt Feld als auch gekoppelt Felder. $\hat{=}$ einheitlich Sprache

Allgemeinste Zustand ist Superposition aller mögl. Produktzustände

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{\{u_\lambda\}} C_{u_1 u_2 u_3 \dots} |u_{\lambda 1}, u_{\lambda 2}, u_{\lambda 3}, \dots\rangle \\ &= \sum_{\{u_\lambda\}} C_{u_1 u_2 u_3 \dots} \prod_\lambda \frac{a_\lambda^{u_\lambda}}{(u_\lambda!)^{1/2}} |0_\lambda\rangle \end{aligned}$$

Übergänge zwischen Zuständen:

$$a_{\lambda}^{\dagger} |u_1 u_2 \dots u_{\lambda} \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{u_{\lambda}+1} \\ (-1)^m \sqrt{1-u_{\lambda}} \end{cases} |u_1 u_2 \dots u_{\lambda}+1 \dots\rangle$$

B
F

$$m = \sum_{i=1}^{\lambda-1} n_i$$

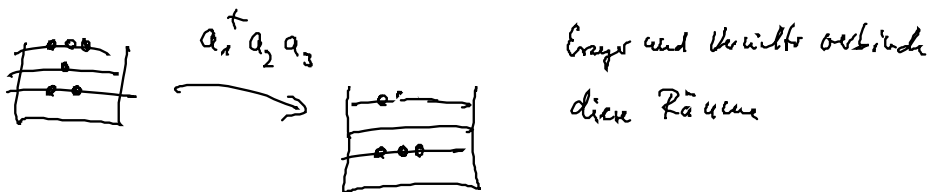
$$a_{\lambda} |u_1 u_2 \dots u_{\lambda} \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{u_{\lambda}} \\ (-1)^m \sqrt{u_{\lambda}} \end{cases} |u_1 u_2 \dots u_{\lambda}-1 \dots\rangle$$

B
F

bzw.
0 f. $u_{\lambda} = 0$

3.3. Interpretation

Fachraum: Gesamtheit der Räume verschiedener Anregungszahlen



- Jedes Teilchen (Feld) wird über Anregungszahlen / Anzahl der Quanta im Moden beschrieben: „ λ -te“ Mode hat u_{λ} Quanta
- über die Def. des Zustands kann stattd. ein Vielteilchentheorie beschrieben werden (nächster Abschnitt: welcher Zustand beschreibt wieviel Teilchen)
- Zeitabhängigkeit: $a_{\lambda}^{(\dagger)}(t) = a_{\lambda}^{(\dagger)} e^{\mp i \omega_{\lambda} t}$

d.h. an stationäre $|\psi\rangle$ va oben ergibt sich zeitab. Lösungszustand
 mit $a_\lambda(t) \rightarrow a_\lambda^\dagger(t)$.

• Zustand:
$$\sum_{\{n_\lambda\}} c(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{a_\lambda^{\dagger n_\lambda}(t) |0_\lambda\rangle}{\sqrt{n_\lambda!}}$$

mit
$$\psi^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \varphi_\lambda^*(\vec{r}) a_\lambda^\dagger(t) \quad | \cdot \varphi_\lambda(\vec{r}), \int d^3r, \sum_\lambda$$

Umkehrung:
$$a_\lambda^\dagger(t) = \int d^3r \varphi_\lambda(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}, t)$$

$$|\psi\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} c(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{1}{\sqrt{n_\lambda!}} \left[\int d^3r \varphi_\lambda(\vec{r}) \psi^\dagger(\vec{r}, t) \right]^{n_\lambda} |0_\lambda\rangle$$

offenichtlich wirkt $\psi^\dagger(\vec{r}, t)$ auf den Vakuumzustand mit Potenz n_λ

$\psi^\dagger(\vec{r}, t)$ erzeugt ein Teilchen am Ort \vec{r} zu Zeit t

• Heiße bei vermittelte / erzeuger.