Relativistische Mechanik

Newton-Mechanik nicht Lorentz-invariant

Jetzt: Lorentz-invariant mit Hilfe von Vierervektoren und Skalaren ($\hat{=}$ Invarianten)

$\rightarrow$ Grenzfall $v \ll c$: Newton-Mechanik

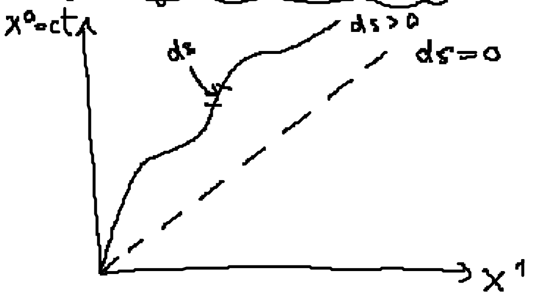
$\quad \underline{r} = \underline{r}(t)$: Klass. Bahn

$\Rightarrow$ Vierervektoren $x^\mu(t)$: Parametrisierung der Weltlinie (ct, x, y, z) durch t ungeeignet, da sich t bei Lorentz-Trafo ~~ändert~~ ändert.

Definition: Eigenzeit τ $\hat{=}$ Zeit im momentanes Ruhesystem (Teilchen mit einem mitgeführten Uhr)

$\Rightarrow x^\mu(\tau)$

Bogenlänge der Weltlinie:



$$
\begin{aligned}
ds &= (dx^\mu dx_\mu)^{1/2} = [c^2 dt^2 - (d\underline{r})^2]^{1/2} \\
&= c\left[1 - \left(\frac{1}{c}\frac{d\underline{r}}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt \\
&= c\,(1-\beta^2)^{1/2}\, dt \\
&= c\,\frac{dt}{\gamma} \qquad ; \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| \\
&= c\, d\tau \\
\Rightarrow &\ \boxed{\tau = \frac{s}{c}}
\end{aligned}
$$

Lorentz-Trafo für $dx = 0$:

$$d\tau = dt' = \frac{dt}{\gamma} \quad \text{(momentanes Ruhesystem)}$$

Definition: Vierergeschwindigkeit $\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}}$

dimensionslos!

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu dx_\mu}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1 \quad \Rightarrow \text{Lorentz-invariant (da skalar)}$$

Komponenten: $u^\mu = \frac{\gamma}{c}\frac{dx^\mu}{dt}$

$$
\left.\boxed{\begin{aligned} u^0 &= \gamma \\ u^i &= \frac{\gamma}{c} v^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau} \end{aligned}}\ \right._{i=1,2,3}
\quad
\left.\begin{aligned} &\rightarrow 1 \\ &\rightarrow \frac{1}{c} v^i \end{aligned}\right\} \text{nichtrelativist. Grenzfall } \gamma \rightarrow 1
$$

Definition: Viererimpuls $\boxed{p^\mu := m_0 c\, u^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau}}$

m_0 : Ruhemasse

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \underbrace{u^\mu u_\mu}_{=1} = m_0^2 c^2 \quad \Rightarrow \text{Lorentz-invariant}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p^0 &= \frac{m_0 c}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, c = p_0 \\ p^i &= \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v) v^i = -p_i \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\xrightarrow[\beta \ll 1]{} m_0 c \\ &\longrightarrow m_0 v^i \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\boxed{\frac{p^i}{p^0} = \frac{u^i}{u^0} = \frac{\frac{\gamma}{c} v^i}{\gamma} = \frac{v^i}{c}} \quad (*) \quad \text{(Zusammenhang 4er-Impuls - 4er-Geschw.)}$$

Physikalische Bedeutung von p^0:

Zunächst Verallgemeinerung der Newton'schen Grundgleichung:

$$\underline{F} = \frac{d}{dt} \underline{p} \qquad (\text{nicht Lorentz-invariant!})$$

Definition: Viererkraft (Minkowski-Kraft)

$$\boxed{f^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu = m_0 c \frac{du^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}}$$

Leistungsbilanz:

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow 0 \overset{!}{=} \frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 2 \frac{du^\mu}{d\tau} u^\mu$$

$$\Rightarrow f^\mu u_\mu \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \gamma \frac{d}{dt} p^0 + \frac{\gamma}{c} \sum_{i=1}^{3} f^i v_i = \frac{\gamma}{c}\Big[\frac{d}{dt}(\underbrace{c p^0}_{E}) - \underline{f} \cdot \underline{v}\Big] = 0$$

Änderung der Energie $\overset{!}{=}$ Leistung

Definition: relativist. Energie

$$\boxed{E := c p^0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = m(v)\, c^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^0 = \frac{E}{c}} \qquad \text{und} \quad f^0 = \frac{1}{c} \underline{f} \cdot \underline{v} \rightarrow \text{Leistung}$$

Relativistische Energie-Impuls-Beziehung:

$$p^\mu p_\mu = (m_0 c)^2 = \frac{E^2}{c^2} - \underline{p}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2} \Leftrightarrow E = \sqrt{c^2 p^2 + (m_0 c^2)^2}$$

nichtrelativist. Grenzfall: $\quad |\underline{p}| \ll m_0 c$

$$E = m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\underline{p}^2}{m_0^2 c^2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{\underline{p}^2}{2 m_0^2 c^2} + \dots\right)$$

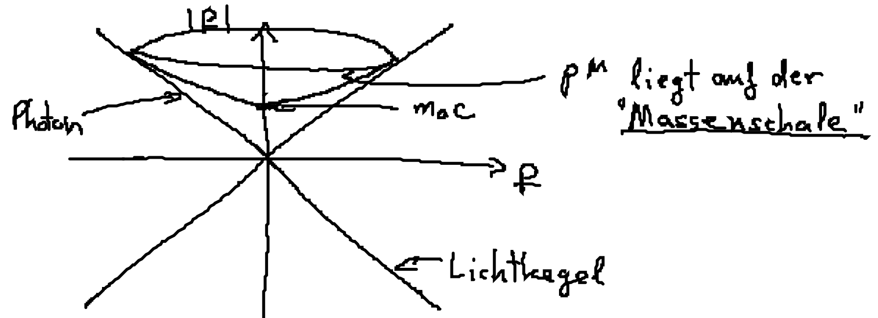
$$\approx \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Ruhe-energie}} + \underbrace{\frac{\underline{p}^2}{2 m_0}}_{\text{Kinet. Energie}} + \dots$$

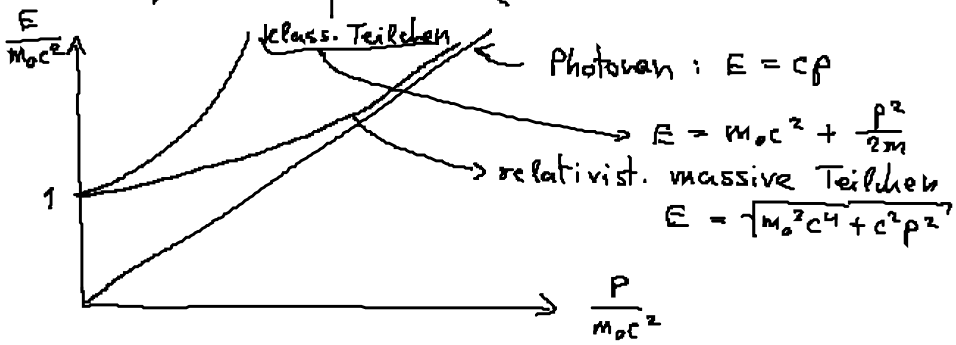
$\underline{p} = 0: \quad \boxed{E = m_0 c^2}$ Äquivalenz von Ruhemasse und Energie!

hochrelativist. Grenzfall: $\quad m_0 = 0$ (z.B. Photon)

$\Rightarrow E = c|\underline{p}| \Rightarrow p^\mu = (|\underline{p}|, \underline{p})$ mit $p^\mu p_\mu = 0$ (lichtartiger Vektor)

$v = c \Rightarrow u^\mu$ nicht mehr definiert, da $\gamma \to \infty$





Bemerkung:
Welle-Teilchen-Dualismus der Quantentheorie

Photon: $E = cp$

Lichtwelle: $E = \hbar\omega$

De-Broglie-Beziehung

$p = \hbar k$

$\omega = c k$

ω : Kreisfrequenz

$\hbar$: Planck'sches Wirkungsquantum

k : Wellenzahl