

IX Alternative Bilder der Quantenmechanik

1. Heisenbergbild

bisher: Schrödingergleichung $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \underline{H} |\psi(t)\rangle$

Erwartungswerte
des Observablen \underline{O} $\langle \psi(t) | \underline{O} | \psi(t) \rangle \equiv \langle \underline{O} \rangle(t)$

diese Formulierung heißt "Schrödingerbild" mit Observablen \vec{r}, \vec{p}

Die Zeitabhängigkeit wird von $|\psi(t)\rangle$ getragen, Alternative?

a) Zeitentwicklungsoperator $\underline{U}(t, t_0)$

t_0 : Beginn der Dynamik, "S" Schrödingerbild, "H" Heisenbergbild

Ansatz: $|\psi_s(t)\rangle = \underline{U}(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle$

\underline{U} durch Einsetzen in Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle = \underline{H} \underline{U}(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle$$

gültig für alle $|\psi_s(t_0)\rangle$

$$\Downarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{U}(t, t_0) = \underline{H} \underline{U}(t, t_0)} \quad \text{"Dgl. f. Operatoren (Zeitentwicklungsoperator)}$$

\underline{U} ist ein "unitärer" Operator: $\underline{U}^\dagger = \underline{U}^{-1}$

$$\Downarrow \text{Darstellung des 1-Operators} \quad \underline{U}^\dagger \underline{U} = \underline{1} = \underline{U}^{-1} \underline{U}$$

formale Lösung:

$$\underline{U}(t, t_0) = \underline{U}(t_0, t_0) + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \underline{H}(t') \underline{U}(t_0, t')$$

ist leider implizit, $u(t_0, t_0) = 1$ aus Ansatz f. $\langle \psi_t | \psi_t \rangle$

Lösung für zeitunabhängiges H :

$$\underline{u} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H u(t_0, t') = 1 - \frac{i}{\hbar} H \int_{t_0}^t dt' u(t_0, t') \quad (*)$$

0. Ordnung: $u^{(0)} = 1$

$u^{(0)}$ einsetzen auf rechte Seite (*)

1. Ordnung: $\underline{u}^{(1)} = 1 - \frac{i}{\hbar} H (t - t_0)$ f. $t_0 = 0$

$u^{(1)}$ einsetzen auf rechte Seite (*)

2. Ordnung:
$$\underline{u}^{(2)} = 1 - \frac{i}{\hbar} H \int_0^t dt' \left(1 - \frac{i}{\hbar} H t' \right)$$
$$= 1 - \frac{i}{\hbar} H t + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 H^2 \frac{t^2}{2}$$

n-te Ordnung:
$$\underline{u}^{(n)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} H^k t^k \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^k$$

\Downarrow
$$\underline{u} = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \text{ bzw. } e^{-\frac{i}{\hbar} H (t - t_0)} \quad (t_0 \neq 0)$$

an best über Reihenentwicklung erklären!

b) Konstruktion d. Heisenbergbilds

$$|\psi_s(t)\rangle = \underline{u}(t, t_0) |\psi_s(t_0)\rangle \quad \Downarrow \quad \underline{u}^{-1} |\psi_s(t)\rangle = |\psi_s(t_0)\rangle \equiv |\psi_H\rangle$$

$|\psi_H\rangle$ ist nicht zeitabhängig!

$$\text{aber: } \langle \psi_H | \underline{O}_H | \psi_H \rangle \stackrel{!}{=} \langle \psi_s | \underline{O}_s | \psi_s \rangle \quad \text{Fordernng}$$

$$\text{Bildtransformation: } \underline{O}_s \rightarrow \underline{O}_H(t) = \underline{u}^{-1}(t, t_0) \underline{O}_s \underline{u}(t, t_0)$$

$$|\psi_s(t)\rangle \rightarrow |\psi_H\rangle = \underline{u}^{-1}(t, t_0) |\psi_s(t)\rangle$$

Stell die Forderng f. Invarianz der EW bei Bildtransfo, zu zeigen:

$$\langle \psi_H | \underline{O}_H | \psi_H \rangle = \langle \underline{u}^{-1} \psi_s | \underline{u}^{-1} \underline{O}_s \underline{u} | \underline{u}^{-1} \psi_s \rangle \quad (\text{nach Def})$$

$$= \langle \psi_s | (\underline{u}^{-1})^\dagger \underline{u}^{-1} \underline{O}_s \underline{u} \underline{u}^{-1} | \psi_s \rangle$$

$$= \langle \psi_s | \underline{u} \underline{u}^{-1} \underline{O}_s \underline{u} \underline{u}^{-1} | \psi_s \rangle$$

$$= \langle \psi_s | \underline{O}_s | \psi_s \rangle \quad \checkmark$$

→ Äquivalenz der Erwartungswerte ist damit bewiesen,

es fehlt, um $\langle \psi_H | \underline{O}_H(t) | \psi_H \rangle$ zu berechnen, einflussung f. $\underline{O}_H(t)$

c) Ableitung einer Gleichung f. Operatoren $\underline{O}_H(t)$

$$\frac{d}{dt} \underline{O}_H(t) = \frac{d}{dt} \left(\underline{u}^{-1} \underline{O}_s \underline{u} \right) = \underbrace{\dot{\underline{u}}^{-1}}_{\dots\dots\dots} \underline{O}_s \underline{u} + \underline{u}^{-1} \dot{\underline{O}}_s \underline{u} + \underline{u}^{-1} \underline{O}_s \dot{\underline{u}} \quad \dots\dots\dots$$

Beispiel f. zeitabhängigen Schrödingeroperators \vec{r}, \vec{p} nicht zeitabhängig

aber $\hat{H}(\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}(t)) \hat{=} \text{explizit. Zeitabhängigkeit}$
 optisch Feld

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{O}_H(t) &= - \frac{1}{i\hbar} \underbrace{\underline{u}^\dagger \underline{H}^\dagger \underline{O}_S \underline{u}}_{\text{aus adjungierter f. f. } \underline{u}} + \underbrace{\underline{u}^{-1} \underline{O}_S \frac{1}{i\hbar} \underline{H} \underline{u}}_{\text{aus Dgl. f. } \underline{u}} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_H \Big|_{\text{expl}} \\ &= - \frac{1}{i\hbar} \left(\underbrace{\underline{u}^\dagger \underline{H}_S \underline{u} \underline{u}^{-1}}_1 \underline{O}_S \underline{u} - \underline{u}^{-1} \underline{O}_S \underline{u} \underline{u}^{-1} \underline{H}_S \underline{u} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_H \Big|_{\text{expl}} \\ &= - \frac{1}{i\hbar} \left(\underline{H}_H \underline{O}_H - \underline{O}_H \underline{H}_H \right) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_H \Big|_{\text{expl}} \end{aligned}$$

\underline{H} ist \underline{H}_S im Schrodingerbild

$$i\hbar \frac{d}{dt} \underline{O}_H = [\underline{O}_H, \underline{H}_H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \underline{O}_H \Big|_{\text{expl}}$$

Heisenberg Gleichung f. Operatoren.

Damit kann man f. Lösung f. $\underline{O}_H(t)$ der EW $\langle \psi_H | \underline{O}_H(t) | \psi_H \rangle$ berechnen werden.

2. Zusammenhang

Schrodingerbild $i\hbar \partial_t | \psi_S(t) \rangle = \underline{H}_S | \psi_S(t) \rangle$

$$\dot{\underline{O}}_S(t) = \partial_t \underline{O}_S(t) \text{ in f. explizite Zeitabhängigkeit}$$

$$\langle \psi_S(t) | \underline{O}_S | \psi_S(t) \rangle = \langle \underline{O}_S \rangle$$

Heisenbergbild: $|\psi_H\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle = \text{konst}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} D_H(t) = [D_H, H_H] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} D_H \Big|_{\text{expl.}}$$

$$\langle \psi_H | D_H(t) | \psi_H \rangle = \langle D_H \rangle$$

Wechselwirkungsbild H ist zeitabhängig, $H = H_0 + U$

(I)

U_0 : über H_0 definiert

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = H_I(t) |\psi_I(t)\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} D_I(t) = [D_I, H_0] + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} D_I \Big|_{\text{expl.}}$$

X Hilberträume und deren ONB

Motivation

▷ Lösung der SG durch Separationsansatz

$$\psi(\vec{r}, t) = f(t) \varphi(\vec{r})$$

$$\hat{H} \varphi_n = E_n \varphi_n$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varphi_n(\vec{r}) \quad (\exists \text{ ONB?})$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\psi, \varphi_n) \varphi_n(\vec{r})$$

Definition

▷ Hilbertraum: HK -Vektorraum mit Skalarprodukt, in dem jede Cauchyfolge konvergiert

$$HK \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

▷ Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$: $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$



Endlich-dim Hilberträume und ONB

Eigenschaften

▷ ONB $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$

• $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ ONB

• $\forall \varphi \in H \exists! a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K} : \varphi = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$

→ Zeige: Koeffizienten sind gegeben durch $a_n = (\varphi, \varphi_n)$

$$\text{Betrachte } \sum_{n=1}^N (\varphi, \varphi_n) \varphi_n = \varphi$$

Beispiel:

• $H = \mathbb{R}^3$

$$\bullet \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \vec{r} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 + z \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

• $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ONB



⇒ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ONB

$$\bullet x = (\vec{r}, \vec{e}_1) = \vec{r} \cdot \vec{e}_1$$

• $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ ONB von \mathcal{H}

Def. $\Rightarrow \mathcal{H} = \left\{ \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n : a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K} \right\}$

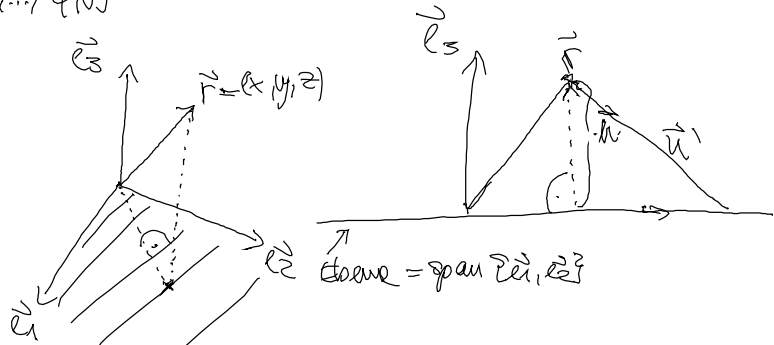
$=: \text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$

Beispiel 2

$\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$

5-dim

$\varphi_1 = \vec{e}_1$
 $\varphi_2 = \vec{e}_2$
 $\varphi_3 = \vec{e}_3$



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \vec{r} - x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2 = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 - (\vec{r} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2$$

$$= \vec{r} - \sum_{n=1}^2 (\vec{r} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n$$

$$\|\vec{u}\| > \|\vec{r}\| = \left\| \vec{r} - \sum_{n=1}^2 (\vec{r} \cdot \vec{e}_n)\vec{e}_n \right\|$$

kleinster Abstand von \vec{r} zur Ebene = $\text{span} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
 Proj. von \vec{r} auf $\text{span} \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Existenz und Eigenschaften einer ONB im unendlich-dimensionalen Hilbertraum

$\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ ONB:

• $\{\varphi_n\}$ ONS

• $\forall \varphi \in \mathcal{H} \exists! (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$

$$\rightarrow a_n = \langle \varphi, \varphi_n \rangle$$

$$\text{Betrachte } \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n = \varphi$$

$$\rightarrow \text{Wir erhalten, dass alle } \sum_{k=1}^{N_k} \langle \varphi, \varphi_{n_k} \rangle \varphi_{n_k} \in \mathcal{H}$$

z.B. $\langle \varphi, \varphi_5 \rangle \varphi_5 + \langle \varphi, \varphi_1 \rangle \varphi_1 + \dots$

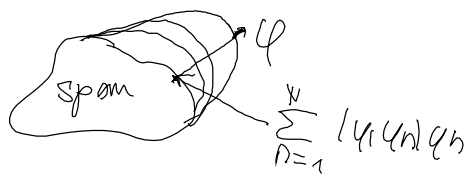
$$\rightarrow \text{Betrachte } \sum_{n=1}^N \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

$$\rightarrow \text{Wann wird Abstand } \|\varphi - \sum_{n=1}^N \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n\| \text{ klein?}$$

Weiter mit Beispiel 2

$$\vec{r} = \sum_{n=1}^3 \langle \vec{r}, \vec{e}_n \rangle \vec{e}_n = 0$$

$\sum_{n=1}^N \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n$ Proj. von φ auf $\text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$



$$\varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle \varphi, \varphi_n \rangle \varphi_n$$