

Kritisches Verhalten, Mean-Field-Näherung

$n=1$

Dim. des Ordnungsparameters

: Beispiele

• Van-der-Waals-Modell (Vanderverschiebung)

• Ising-Modell für Ising-Modell

Van-der-Waals-Theorie:

Dampf $\rightarrow p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2} = p(T, v)$

b : Repulsiv
 a : Attraktiv

$\sigma = \frac{V}{N} = \frac{1}{\rho}$

führe ein: $\tilde{T} = \frac{T}{T_c}$, $\tilde{v} = \frac{v}{v_c}$, $\tilde{p} = \frac{p}{p_c}$

$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{T}}{\tilde{v} - 1} - \frac{3}{\tilde{v}^2} = \tilde{p}(\tilde{T}, \tilde{v})$ Am kritischen Punkt: $\tilde{T} = \tilde{v} = \tilde{p} = 1$

Taylorentwicklung um den krit. Punkt:

$\tilde{p}(1 + \Delta \tilde{T}, 1 + \Delta \tilde{v}) \approx \tilde{p}(1, 1) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{T}} \Big|_{\substack{\tilde{T}=1 \\ \tilde{v}=1}} \Delta \tilde{T} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{v}} \Big|_{\substack{\tilde{T}=1 \\ \tilde{v}=1}} \Delta \tilde{v}$

$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{T}} \Big|_c = 0$
 $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{v}} \Big|_c = 0$

$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{T}^2} \Big|_c (\Delta \tilde{T})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{v}^2} \Big|_c (\Delta \tilde{v})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{T} \partial \tilde{v}} \Big|_c \Delta \tilde{T} \Delta \tilde{v} \cdot 2$

$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \tilde{p}}{\partial \tilde{v}^3} \Big|_c (\Delta \tilde{v})^3 + \dots$

Beachte: Keine höheren Ableitungen in \tilde{T} , da \tilde{p} nur linear in \tilde{T} !

$\Rightarrow \tilde{p}(1 + \Delta \tilde{T}, 1 + \Delta \tilde{v}) = 1 + 4 \Delta \tilde{T} - 6 \Delta \tilde{T} \Delta \tilde{v} - \frac{3}{2} (\Delta \tilde{v})^3$

$$\tilde{p}-1 = \frac{p_c - p}{p_c} = 4 \frac{T-T_c}{T_c} - 6 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right) \left(\frac{v-v_c}{v_c} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{v-v_c}{v_c} \right)^3 + \dots$$



Wir wissen

$T < T_c$: System separiert in 2 Phase mit unterschiedlichen spezifischen Volumina
 v_{FL} , v_G
 (Flüssigkeit) (Gas)

es gilt (dieses unterhalb T_c):

$$\textcircled{I} \frac{p_{FL} - p_c}{p_c} \approx 4 \Delta T - 6 \Delta T \left(\frac{v_{FL} - v_c}{v_c} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{v_{FL} - v_c}{v_c} \right)^3$$

$$\textcircled{II} \frac{p_G - p_c}{p_c} \approx \dots \dots \dots \left(\frac{v_G - v_c}{v_c} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{v_G - v_c}{v_c} \right)^3$$

Benutze nun Koexistenz der beide Phasen!

$$p_{FL} \stackrel{!}{=} p_G \Rightarrow \textcircled{I} = \textcircled{II}$$

$$\Rightarrow -6 \Delta T \left(\frac{U_G - U_{FE}}{U_C} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{U_G - U_C}{U_C} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{U_{FE} - U_C}{U_C} \right)^3$$

$$\textcircled{*} = 0$$

Führe ein: $\frac{U_G}{U_C} = \frac{U_C}{U_C} + \frac{\overbrace{U_G - U_C}^{\epsilon_U}}{U_C} = 1 + \epsilon_U$

$$\frac{U_{FE}}{U_C} = \frac{U_C}{U_C} - \left(\frac{U_C - U_{FE}}{U_C} \right) = 1 - \epsilon_U$$

Annahme: $\Rightarrow \epsilon_U = \frac{1}{2} \left(\frac{U_G - U_{FE}}{U_C} \right) > 0$

Symmetrie um U_C !!



Aus $\textcircled{*}$:

$$-6 \Delta T 2 \epsilon_U - \frac{3}{2} \epsilon_U^3 + \frac{3}{2} (-\epsilon_U)^3 = 0 \quad | : \epsilon_U$$

$$2 \epsilon_U^2 = \left(\frac{U_G - U_{FE}}{U_C} \right)^2 = 16 \frac{T_C - T}{T_C}$$

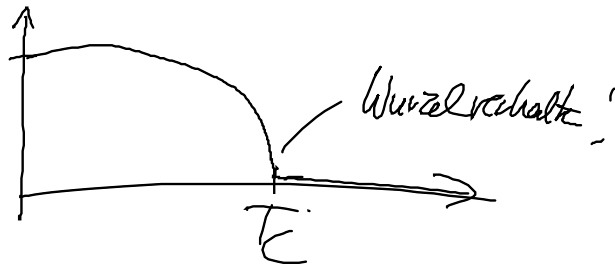
$$\Rightarrow \frac{U_G - U_{FE}}{U_C} = 4 \left(\frac{T_C - T}{T_C} \right)^{\beta}$$

Ordnungsparameter mit $\beta = \frac{1}{2}$

Man findet:

Derselbe Exponent ergibt sich für die Größe

$$\frac{S_{FE} - S_G}{S_c} = \frac{dS}{S_c}$$



"Summary":

Die van-der-Waals-Theorie (Mean-field-Theorie!!) gibt qualitativ nicht, das Potenzgesetzverhalten wieder, aber Exponent falsch:

nichtiger Exponent

$$\beta = \frac{1}{3}$$

(Universalitätsklasse des 3-dimensionalen Ising-Modells)

↳ Raumdimension:

III.4. Kritisches Verhalten im unendlich langreichweitigen

Ising-Modell

$$J_{ij} \rightarrow \frac{J_0}{N} \quad \forall i \neq j$$

exakt !!
(Hubbard-Stratonovich)

⇒ Selbstkonsistenzgleichung

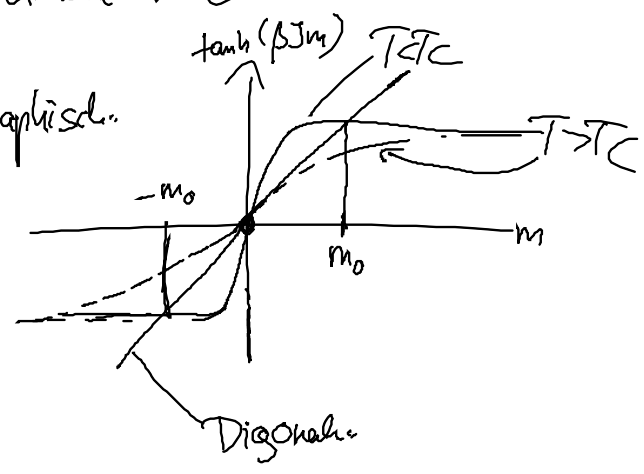
$$m = \tanh(\beta J m + \beta h)$$

(*)

betrachte $h=0$

Kapazität pro Gitterplatz

graphisch..



man sieht: $T > T_c$: nur ein Schnittpunkt mit der Kurve m , nämlich bei $m=0$

$T < T_c$: Drei Schnittpunkte bei $m=0, m=\pm m_0$

Festlegung von T_c :

um $m=0$, da die Kapazität dort unterhalb T_c klein ist!

→ entwickle (*)

benutze

$$m = \tanh(\beta J m)$$

$$\tanh x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + O(x^7)$$

$$m \approx \beta J m - \frac{1}{3} (\beta J m)^3 + \dots$$

$m=0$ ist immer eine Lösung!! (da $h=0$)

dividiere durch m (Annahme: $T \leq T_c$) und vernachlässige höhere Terme!

$$\Rightarrow 1 = \beta J - \frac{1}{3}(\beta J)^3 m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 3(\beta J)^3 (\beta J - 1) \quad \text{gilt für drei von Null verschiedene Lösungen}$$

definiere krit. Temperatur über die Gleichg.

$$\frac{J}{k_B T_c} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow T_c = \frac{J}{k_B} \Rightarrow \beta J = \frac{T_c}{T}$$

$$\Rightarrow m^2 = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right) = 3 \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \left(\frac{T_c - T}{T} \right)$$

$$\approx 3 \frac{T^2}{T_c^2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)$$

bestimmt in erster Näherung die Temperaturabhängigkeit

$$\text{denn: } \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 = \left(\frac{T - T_c}{T_c} + \frac{T_c}{T_c} \right)^2 = (\varepsilon + 1)^2 = 1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{Spontane Magnetisierung} = \boxed{m_0 = \pm \sqrt{3T} (\beta J)^2 \sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}}$$

$$\text{bzw } m_0 \sim \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta \text{ mit } \beta = \frac{1}{2}$$

Zur Diskussion der Stabilität der Lösungen.

Freie Energie:

$$\text{Ausgangspunkt: } \beta F = -\ln Z_U$$

$$= S(\{H_i\})$$

Hilfsfelder
im Rahmen der
Hubbard-Stratonovich-
Trick

$$d\{H_i\} = \sqrt{H_i}$$

am Sattelpunkt

Keine
extremen
Felder!

$$\text{mit } S = \frac{1}{2\beta} \sum_{ij} H_i \left(\underline{J}^{-1} \right)_{ij} H_j$$

$$- \sum_i \ln Z \cosh(H_i)$$

$$\text{und } \beta^{-1} \underline{H}_N = \sum_i J_{ik} m_k \text{ am Sattelpunkt}$$

homogene, unendlich langreichweitige Kopplung:

$$J_{ij} = \frac{J_0}{N} \implies m_i = m$$

$$\implies \beta^{-1} \underline{H}_N = J_0 m = \beta^{-1} \underline{H}$$

$$\implies S = \frac{1}{2\beta} \sum_{ij} (\beta J_0 m) \left(\frac{J_0}{N} \right)^{-1} (\beta J_0 m) - \sum_i \ln Z \cosh(\beta J_0 m)$$

= ...

$$S = N \left(\frac{1}{2} \beta J_0 m^2 - \ln 2 \cosh(\beta J_0 m) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta F}{N} = \frac{\beta J_0 m^2}{2} - \ln(2 \cosh(\beta J_0 m))$$

Entwicklung für kleine m

$$\text{benutze: } \cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \dots$$

$$f = \frac{1}{2} J_0 m^2 - k_B T \ln(2 \cosh(\beta J_0 m))$$

$$= \frac{1}{2} J_0 m^2 - k_B T \ln 2 - k_B T \ln(\cosh(\beta J_0 m))$$

$$\approx \frac{1}{2} J_0 m^2 - k_B T \ln 2 - k_B T \ln\left(1 + \frac{1}{2} \frac{(\beta J_0 m)^2}{x}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2} J_0 m^2 - k_B T \ln 2 - k_B T \left(\frac{1}{2} (\beta J_0 m)^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{4!} (\beta J_0 m)^4 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m^2 (J - \beta J^2) + \frac{1}{8} \beta^3 J^4 m^4 - k_B T \ln 2$$

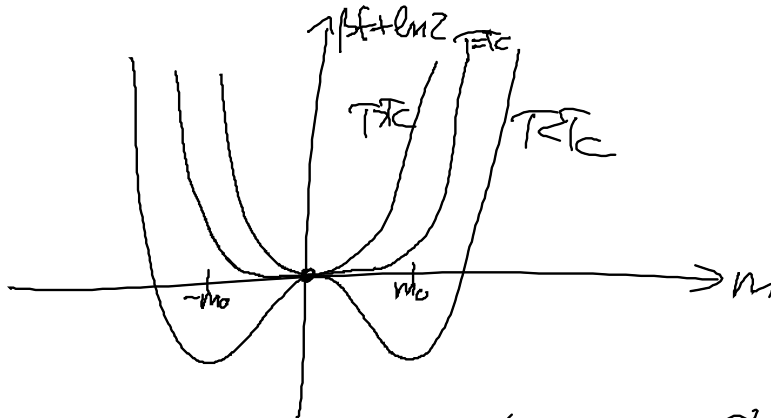
$$\Rightarrow \beta f \approx \frac{1}{2} m^2 \beta J (1 - \beta J) + \frac{1}{8} \beta^3 J^4 m^4 - \ln 2$$

$$\left(\frac{T_c}{T} \right)^2 \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)$$

man sieht • für $m=0 \Rightarrow \beta f = -\ln 2$

• für $T < T_C$: erster Term wird negativ
($m > 0$)

aber zweite Term positiv!



Symmetrie
(da $h=0$)

man sieht bei $T = T_C$ ändert sich die Stabilität der Lösung bei $m=0$

Zugehörige Suszeptibilität:

entweder aus f oder direkt aus m

über: $\chi = \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_T$ in Limit $h \rightarrow 0$

magnetische Suszeptibilität

$$m = \tanh(\beta J m + \beta h)$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{\cosh^2(\beta J m + \beta h)} \left(\beta J \frac{\partial m}{\partial h} \Big|_T + \beta \right)$$

$$\Rightarrow \chi \left(1 - \frac{\beta J}{\cosh^2(\beta J m + \beta h)} \right) = \frac{\beta}{\cosh^2(\beta J m + \beta h)}$$

$$h \rightarrow 0: \Rightarrow \chi \left(1 - \frac{\beta J}{\cosh^2(\beta J m)} \right) = \frac{\beta}{\cosh^2(\beta J m)}$$

beachte: $\cosh^2 x = \frac{1}{1 - \tanh^2 x}$ und $\tanh(\beta J m) = m$!!

$$\chi (1 - \beta J (1 - m^2)) = \beta (1 - m^2)$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{\beta (1 - m^2)}{1 - \beta J (1 - m^2)}$$

$$\boxed{\chi = \frac{\beta}{\frac{1}{1 - m^2} - \beta J}} \quad (*)$$

Temperaturscheidung:

a) $T > T_c$: d.h. $m = 0$

aus (*) $\chi = \frac{\beta}{1 - \beta J} = \frac{1}{k_B T} \left(\frac{1}{1 - \frac{T_c}{T}} \right)$
 $= \frac{1}{k_B (T - T_c)}$ Curie-Verhalten

$$\Rightarrow \chi = k_B^{-1} (T - T_C)^{-\gamma}$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\gamma = 1}}$$

"Meanfield"-Exponent für die Suszeptibilität
"von oben"

\Rightarrow wie Kompressibilität im van-der-Waals-Ges!

b) $T < T_C$

$$\text{aus (*) } \chi(m=0) = \frac{\beta}{1 - \beta J} = \frac{1}{k_B (T - T_C)} < 0 \quad !$$

Lösung instabil !!

betrachte ferromagnet. Lösung $m = \pm m_0$

$$\chi = \frac{\beta}{1 - m_0^2 - \beta J}$$

Sei m_0 klein ($T \lesssim T_C$) $\Rightarrow \frac{1}{1 - m_0^2} \approx 1 + m_0^2$

$$\Rightarrow \chi \approx \frac{\beta}{1 + m_0^2 - \beta J}$$

Zeige, dass der Nenner positiv ist

$$\begin{aligned}
 1 + m_0^2 - \beta J &= 1 + 3 \frac{T^2}{T_c^2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) - \frac{T_c}{T} \\
 &= \frac{T - T_c}{T} + 3 \frac{T^2}{T_c^2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \\
 &\approx \frac{T_c}{T} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right) + 3 \frac{T^2}{T_c^2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \\
 &= 2 \frac{T_c - T}{T_c} > 0 \quad !
 \end{aligned}$$

Nachbemerkung:

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow |m_0| \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \chi \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus } \chi = \frac{\beta}{\frac{1}{1 - m_0^2} + \beta J} \end{array} \right\} \rightarrow \infty$$